Mathematische Methoden der Algorithmik – Vorlesung #04

Arne Schmidt

Letzte Woche

Dualität

Maximiere $c^T x$

Unter Bedingungen

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Minimiere $b^T y$

Unter Bedingungen

$$A^T y \geq c$$
$$y \geq 0$$

-Maximiere $-b^T y$

Unter Bedingungen

$$-A^T y \leq -c$$
$$y \geq 0$$

Theorem (Starke Dualität)
Besitzt das primale LP eine optimale Lösung x^*, dann besitzt auch das duale LP eine optimale Lösung y^* und es gilt

$$c^T x^* = b^T y^*$$

Theorem (Komplementärer Schlupf)
Angenommen, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ sind gültige Lösungen für das primale bzw. duale LP. Dann sind diese genau dann optimal, wenn:

1. $\forall j = 1, \ldots, n$: $x_j z_j = 0$
2. $\forall i = 1, \ldots, m$: $y_i w_i = 0$

Wobei $w = (w_1, \ldots, w_m)$ und $z = (z_1, \ldots, z_n)$ die zugehörigen primalen bzw. dualen Schlupfvariablen sind.

Dualer Simplex

Primales Dictionary infeasible, aber dual feasible?

Wenn das primale Dictionary infeasible ist, haben wir eine Phase I gestartet. Aber ist das immer notwendig?

$$\begin{array}{|rrrrr|}\hline \zeta = & 0 - & 1x_1 - & 1x_2 \\ \hline w_1 = & 4 + & 2x_1 + & 1x_2 \\ w_2 = & -8 + & 2x_1 - & 4x_2 \\ w_3 = & -7 + & 1x_1 - & 3x_2 \\ \hline \end{array}$$

Infeasible Dictionary!

$$\begin{array}{|rrrrr|}\hline -\xi = & 0 - & 4y_1 + & 8y_2 + & 7y_3 \\ \hline z_1 = & 1 - & 2y_1 - & 2y_2 - & 1y_3 \\ z_2 = & 1 - & 1y_1 + & 4y_2 + & 3y_3 \\ \hline \end{array}$$

Feasible Dictionary!

Wir können Simplex direkt über das duale Dictionary durchführen!

Dual pivotisieren I

Betrachte komplementären Schlupf: Wenn wir bspw. y_2 in die Basis aufnehmen, muss w_2 den Wert 0 annehmen, geht also aus der Basis heraus!

Durch negativ-transponierte Matrix A: Nimm Basisvariable heraus, die die kleinste Konstante besitzt.

$\zeta =$	$0 -$	$1x_1 -$	$1x_2$	
$w_1 =$	$4 +$	$2x_1 +$	$1x_2$	
$w_2 =$	$\boxed{-8} +$	$2x_1 -$	$4x_2$	
$w_3 =$	$-7 +$	$1x_1 -$	$3x_2$	

Infeasible Dictionary!

$-\xi =$	$0 -$	$4y_1 +$	$8y_2 +$	$7y_3$
$z_1 =$	$1 -$	$2y_1 -$	$2y_2 -$	$1y_3$
$z_2 =$	$1 -$	$1y_1 +$	$4y_2 +$	$3y_3$

Feasible Dictionary!

Dual pivotisieren II

Wenn w_2 heraus geht, wer geht in die Basis rein?
Über das duale erhalten wir z_1 oder z_2. Da einer der beiden auf 0 geht, darf das entsprechende x_1 bzw x_2 größer werden!

Hier: Tausche y_2 mit z_1 im dualen Dictionary, also tausche w_2 mit x_1 im primalen Dictionary!

$$\begin{array}{rcrrr}
\zeta & = & 0 - & 1x_1 - & 1x_2 \\
\hline
w_1 & = & 4 + & 2x_1 + & 1x_2 \\
w_2 & = & \boxed{-8} + & \boxed{2x_1} - & 4x_2 \\
w_3 & = & -7 + & 1x_1 - & 3x_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrrrr}
-\xi & = & 0 - & 4y_1 + & 8y_2 + & 7y_3 \\
\hline
z_1 & = & 1 - & 2y_1 - & 2y_2 - & 1y_3 \\
z_2 & = & 1 - & 1y_1 + & 4y_2 + & 3y_3
\end{array}$$

Infeasible Dictionary!

Feasible Dictionary!

Größter negativer Quotient $\left(\frac{a_{ij}}{b_i}\right)$

Dual pivotisieren III

Worüber pivotisieren wir nun?

w_3 muss raus, w_2 kommt dafür rein!

$$\begin{array}{|rrrr|}
\hline
\zeta = & -4 - & .5w_2 - & 3x_2 \\
\hline
w_1 = & 12 + & 1w_2 + & 5x_2 \\
x_1 = & 4 + & .5w_2 + & 2x_2 \\
w_3 = & \boxed{-3} + & \boxed{.5w_2} - & 1x_2 \\
\hline
\end{array}$$

Infeasible Dictionary!

$$\begin{array}{|rrrrr|}
\hline
-\xi = & 4 - & 12y_1 - & 4z_1 + & 3y_3 \\
\hline
y_2 = & .5 - & 1y_1 - & .5z_1 - & .5y_3 \\
z_2 = & 3 - & 5y_1 - & 2z_1 + & 1y_3 \\
\hline
\end{array}$$

Feasible Dictionary!

Dual pivotisieren IV

Nun sind beide Dictionaries feasible und wir haben sogar eine optimale Lösung!

$$\begin{array}{|rcrrr|}\hline \zeta = & -7\,- & 1w_3\,- & 4x_2 \\ \hline w_1 = & 18\,+ & 2w_3\,+ & 7x_2 \\ x_1 = & 7\,+ & 1w_3\,+ & 3x_2 \\ w_2 = & 6\,+ & 2w_3\,+ & 2x_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|rrrrr|}\hline -\xi = & 7\,- & 18y_1\,- & 7z_1\,- & 6y_3 \\ \hline y_2 = & 1\,- & 2y_1\,- & 1z_1\,- & 2y_3 \\ z_2 = & 4\,- & 7y_1\,- & 3z_1\,- & 2y_3 \\ \hline \end{array}$$

Feasible Dictionary!

Feasible Dictionary!

Dual pivotisieren

Ganz allgemein können wir das primale Dictionary folgendermaßen dual pivotisieren, falls negative b_i existieren.

- Wähle **Basisvariable** nach der kleinsten negativen Konstante.
  (Falls keine Variable mehr negativ ist, ist das Dictionary optimal!)

- Wähle **Nichtbasisvariable** mit dem größten negierten Quotienten

Duale Phase I?

Was machen wir, wenn das primale und duale Dictionary infeasible ist?!

Gibt es eine duale Phase I?

Duale Phase I!

$$\begin{array}{rrrr}
\zeta = & 0 - & 1x_1 + & 4x_2 \\
\hline
w_1 = & 4 + & 2x_1 + & 1x_2 \\
w_2 = & -8 + & 2x_1 - & 4x_2 \\
w_3 = & -7 + & 1x_1 - & 3x_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
-\xi = & 0 - & 4y_1 + & 8y_2 + & 7y_3 \\
\hline
z_1 = & 1 - & 2y_1 - & 2y_2 - & 1y_3 \\
z_2 = & -4 - & 1y_1 + & 4y_2 + & 3y_3
\end{array}$$

Suche eine Zielfunktion, sodass das duale Dictionary feasible wird. Z.B.: $-x_1 - x_2$

$$\begin{array}{rrrr}
\eta = & 0 - & 1x_1 - & 1x_2 \\
\hline
w_1 = & 4 + & 2x_1 + & 1x_2 \\
w_2 = & -8 + & 2x_1 - & 4x_2 \\
w_3 = & -7 + & 1x_1 - & 3x_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
-\mu = & 0 - & 4y_1 + & 8y_2 + & 7y_3 \\
\hline
z_1 = & 1 - & 2y_1 - & 2y_2 - & 1y_3 \\
z_2 = & 1 - & 1y_1 + & 4y_2 + & 3y_3
\end{array}$$

Nun dualen Simplex auf das primale Dictionary anwenden!

Duale Phase I – Ergebnis

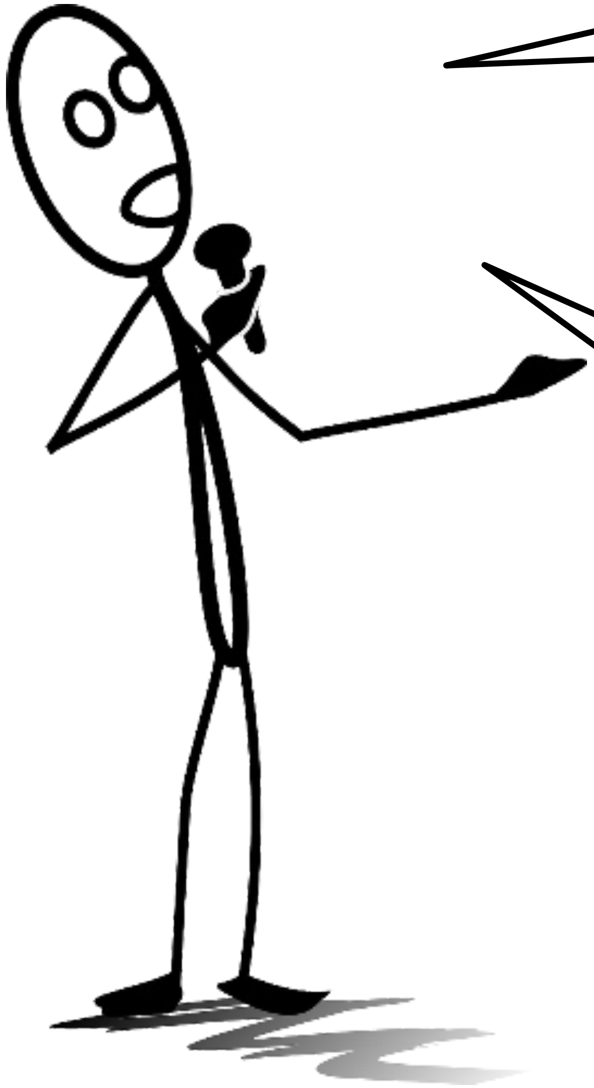
$$\begin{array}{|rcrrr|}
\hline
\eta = & -7 - & 1w_3 - & 4x_2 \\
\hline
w_1 = & 18 + & 2w_3 + & 7x_2 \\
x_1 = & 7 + & 1w_3 + & 3x_2 \\
w_2 = & 6 + & 2w_3 + & 2x_2 \\
\hline
\end{array}$$

Mit $\zeta = -x_1 + 4x_2 = -(7 + w_3 + 3x_2) + 4x_2$ können wir ein Dictionary zum originalen LP wieder herstellen.

$$\begin{array}{|rcrrr|}
\hline
\zeta = & -7 - & 1w_3 + & 1x_2 \\
\hline
w_1 = & 18 + & 2w_3 + & 7x_2 \\
x_1 = & 7 + & 1w_3 + & 3x_2 \\
w_2 = & 6 + & 2w_3 + & 2x_2 \\
\hline
\end{array}$$

Wir sehen direkt: Das LP ist unbeschränkt!

Duale Phase I – Infeasibility



Infeasibility können wir erkennen!

Ein LP ist genau dann infeasible, wenn das modifizierte LP dual unbeschränkt ist.

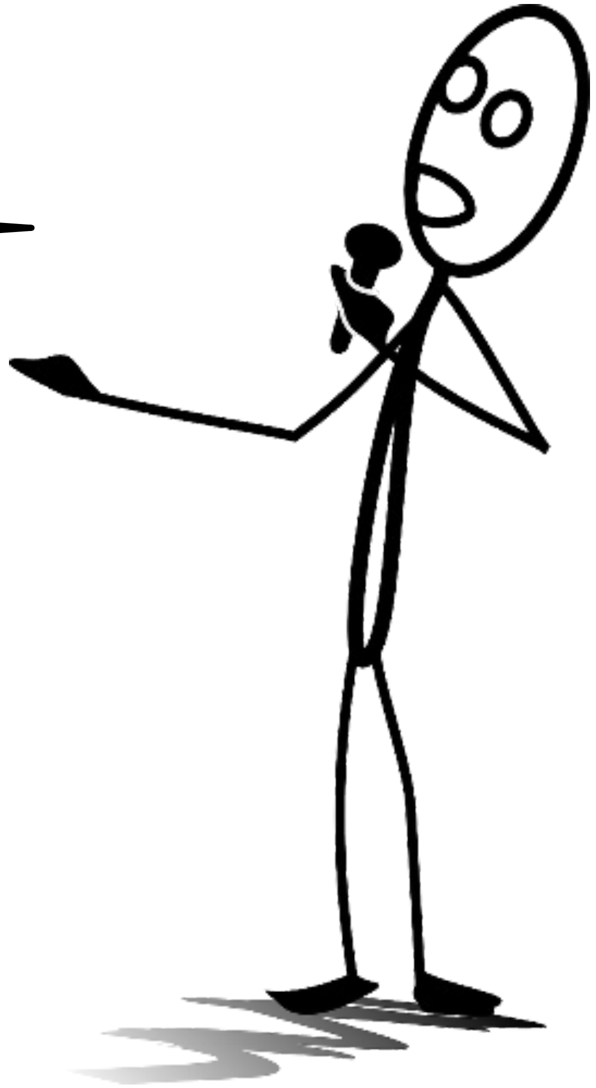
Recap

Jedes LP besitzt ein duales LP.

Sind beide feasible, besitzen sie denselben optimalen Lösungswert.

Über komplementären Schlupf können wir die duale Lösung bestimmen.

Wenn Dictionary dual feasible ist, können wir den dualen Simplex-Algorithmus durchführen



Dualisieren von LP im Allgemeinen

Wie dualisiert man, wenn das LP nicht in Standardform ist?

Zuerst in Standardform bringen kann ein LP unverständlicher machen…

Dualisieren im Allgemeinen – Gleichungen

Betrachte eine Gleichung $\mathrm{a_i} x = b_i$, was äquivalent ist zu

1. $a_i x \leq b$, sowie
2. $-a_i x \leq -b_i$

Damit werden im dualen zwei Variablen $y_i^+ \geq 0$ und $y_i^- \geq 0$ erzeugt.

Wie treten diese Variablen im dualen LP in der Zielfunktion und in den Constraints auf?

Sie müssen immer in der Form $a y_i^+ - a y_i^-$ für einen Koeffizienten a vorkommen!
Damit können wir aber auch eine freie Variable y_i benutzen, die positiv oder negativ sein kann!

Also: Eine Gleichung $\mathrm{a_i} x = b_i$ erzeugt eine freie Variable y_i.

Auch andersherum: Eine freie Variable y_i erzeugt eine Gleichung $\mathrm{a_i} x = b_i$.

Dualisieren im Allgemeinen – Ungleichung

Betrachte eine Gleichung $\mathrm{a_i}x \geq b_i$, was äquivalent ist zu $-a_i x \leq -b_i$

Damit wird im dualen eine Variable $y_i \geq 0$ erzeugt.

Achte bei den Constraints und der Zielfunktion auf das Vorzeichen!
Empfohlen: Erst in $-a_i x \leq -b_i$ umwandeln!

Also: Eine Gleichung $a_i x \geq b_i$erzeugt eine Variable $y_i \geq 0$.

Auch andersherum: Eine Variable $y_i \geq 0$ erzeugt eine Ungleichung $a_i x \leq b_i$ (passe auf Vorzeichen auf).

Beispiel – Dualisieren

$$\begin{aligned} &\max 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad -x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 4 \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 10 \\ &\quad -3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \quad \text{frei} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -4 \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 10 \\ &\quad 3x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2 \\ &\quad x_1, x_2 \geq 0 \\ &\quad x_3 \quad \text{frei} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min -4y_1 + 10y_2 - 2y_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\quad y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 3 \\ &\quad y_1 + 3y_2 - 2y_3 \geq 4 \\ &\quad 3y_1 - 2y_2 + 1y_3 = -2 \\ &\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ausblick: Integer Programming

Ein ganzzahliges Programm (IP)

Betrachte einen Graphen $G = (V, E)$.

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{e \in E} x_e \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, \qquad \forall v \in V \\
&\qquad x_e \in \{0,1\}, \qquad \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Dieses IP modelliert das Matching-Problem

Probleme:

- Wir können Simplex nicht darauf anwenden. Warum?
- Wir können das duale Programm nicht direkt bestimmen.

Schauen wir uns das *relaxierte* Problem an.

Ein relaxiertes ganzzahliges Programm (IP)

Betrachte einen Graphen $G = (V, E)$.

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$

s.t.

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, \qquad \forall v \in V$$

$$x_e \geq 0, \qquad \forall e \in E$$

Fragen:

- Warum benötigen wir die Bedingung $x_e \leq 1$ nicht?
- Was ist das duale LP dazu?

Dieses LP modelliert das *fraktionale* Matching-Problem

Ein relaxiertes ganzzahliges Programm (IP)

Betrachte einen Graphen $G = (V, E)$.

$$\max \sum_{e \in E} x_e$$
s.t.
$$\begin{aligned} \sum_{e \in \delta(v)} x_e &\leq 1, && \forall v \in V \\ x_e &\geq 0, && \forall e \in E \end{aligned}$$

$$\min \sum_{v \in V} y_v$$
s.t.
$$\begin{aligned} \sum_{e \in \delta(v)} y_v &\geq 1, && \forall e \in \mathrm{E} \\ y_v &\geq 0, && \forall v \in V \end{aligned}$$

Dieses LP modelliert das *fraktionale* Matching-Problem

Welches Problem ist das?

Ein relaxiertes ganzzahliges Programm (IP)

Betrachte einen Graphen $G = (V, E)$.

$$\begin{aligned} &\max \sum_{e \in E} x_e \\ &\text{s.t.} \\ &\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, \forall v \in V \\ &x_e \in \{0,1\}, \forall e \in E \end{aligned}$$

IP_M

$$\begin{aligned} &\max \sum_{e \in E} x_e \\ &\text{s.t.} \\ &\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1, \forall v \in V \\ &x_e \geq 0, \forall e \in E \end{aligned}$$

LP_M

$$\begin{aligned} &\min \sum_{v \in V} y_v \\ &\text{s.t.} \\ &y_v + v_w \geq 1, \forall \{v, w\} \in \mathrm{E} \\ &y_v \geq 0, \forall v \in V \end{aligned}$$

LP_{VC}

$$\begin{aligned} &\min \sum_{v \in V} y_v \\ &\text{s.t.} \\ &y_v + v_w \geq 1, \forall \{v, w\} \in \mathrm{E} \\ &y_v \in \{0,1\}, \forall v \in V \end{aligned}$$

IP_{VC}

Wie stehen IP_M, LP_M, LP_{VC} und IP_{VC} zueinander?
Klar: $\mathrm{LP}_M = \mathrm{LP}_{VC}$

Relaxierte IPs

Wird ein IP relaxiert, d.h. Ganzzahlige Variablen dürfen reelle Werte annehmen, kann der optimale Zielfunktionswert nicht schlechter werden.

Damit gilt also $\mathrm{IP}_M \leq \mathrm{LP}_M = \mathrm{LP}_{VC} \leq \mathrm{IP}_{VC}$

Beim Unterschied zwischen IP und LP spricht man auch vom **Integrality Gap**.

Wie groß kann dieser Unterschied werden?

Man kann sich schnell davon überzeugen, dass $\mathrm{IP}_M \leq 2 \cdot \mathrm{IP}_{VC}$ gilt. Also ist der Integrality Gap sowohl für Matching als auch für Vertex Cover maximal 2.

Ausblick

Was noch kommt...

Wie setzte man Simplex in der Praxis um?

Wie löst man ganzzahlige Programme in der Praxis?

Was für Techniken gibt es, den Lösungsprozess zu beschleunigen?