Beweis (Starke Dualität):

Sei x^* eine optimale Lösung des primalen LPs.
zu zeigen: $\exists y^*$ mit y^* ist zulässig für das duale LP und $c^T x^* = b^T y^*$.

Das letzte Dictionary hat für die ZF die Form

$$\zeta = \zeta^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k \quad \text{mit } \bar{c}_k \leq 0 \text{ für alle } k \in \{1, \dots, n+m\}$$

Außerdem gilt $\zeta^* = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$

Wähle nun $(y^*)_i = -\bar{c}_{n+i}$. Damit ist $y^* \geq 0$.

Nun ist

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = \zeta^* + \sum_{k=1}^{n+m} \bar{c}_k x_k$$

$$= \zeta^* + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k x_k + \sum_{k=n+1}^{m+n} \bar{c}_k x_k$$

$$= \zeta^* + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k x_k + \sum_{i=1}^{m} -y_i^* x_{n+i}$$

$$= \zeta^* + \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k x_k - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$

$$\underbrace{\qquad}_{c^T x} = \underbrace{\left(\zeta^* - \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i\right)}_{w} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\bar{c}_k + \sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i^*\right) x_k}_{d^T x}$$

Aus der Linearität der Ausdrücke für alle x folgt

$$c_j x_j = w_j + d_j x_j$$

Das muss auch für $x_j = 0$ gelten

$$\Rightarrow \zeta^* = b^T y$$

Weiter ist

$$c_j = \bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

Da $\bar{c}_j \leq 0$, folgt

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} \geq c_j \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow y^*$ ist zulässig $\square$

Beweis (komplementärer Schlupf)

Durch schwache Dualität gilt

$$x^T c \leq x^T A^T y = y^T A x \leq y^T b.$$

Für optimale Lösungen ist nun überall Gleichheit, d.h. es muss gelten

$$x^T(A^T y - c) = 0 \quad \text{und} \quad y^T(\overset{b - Ax}{\cancel{Ax - b}}) = 0 \qquad (*)$$

Nach Definitionen sind

$$x \geq 0, \; y \geq 0, \text{ aber auch } A^T y - c \geq 0$$
$$\text{und } b - Ax \geq 0$$

Also muss für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gelten

$$x_j (A^T y - c)_j \geq 0$$

analog $i \in \{1, \dots, m\}$

$$y_i (b - Ax)_i \geq 0$$

~~Bew~~

Damit kann in $(*)$ nur die 0 erzeugt werden, wenn

$$x_j \overbrace{(A^T y - c)_j}^{=: z_j \,!} = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{~~bzw.~~ und}$$

$$y_i \underbrace{(b - Ax)_i}_{=: w_i \,!} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$\Rightarrow$ Behauptung folgt. $\square$