VL 9-Notizen

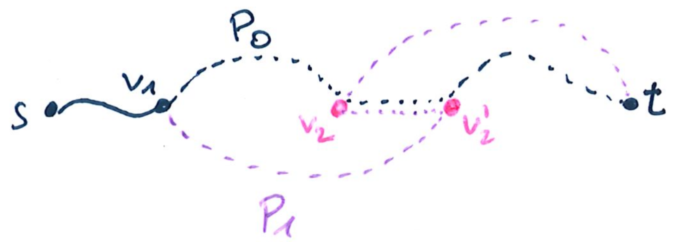
Theorem: Kürzeste-Wege-IP besitzt Integrality gap 1.

Beweis: Betrachte eine opt. Basislösung x^* für das IP.

Annahme: x^* ist nicht ganzzahlig.

Sei $\tilde{G}$ der Graph, der nur Kanten $e \in E$ mit $x_e > 0$ besitzt. Da x^* nicht ganzzahlig ist, existieren zwei verschiedene Pfade P_0, P_1 zwischen s und t. (Andernfalls wäre $x_e = 1$ für alle $e \in E(\tilde{G})$.)

Sei nun v_1 der ~~Knoten~~ letzte Knoten, bis zu welchem P_0 und P_1 identisch sind, und v_2 der erste Knoten auf P_0, der wieder auf P_0 und P_1 liegt.



Sei $\tilde{P}_0$ der Pfad von v_1 nach v_2 auf P_0 und $\tilde{P}_1$ der Pfad von v_1 nach v_2 auf P_1.

Es muss gelten
$$\sum_{e \in \tilde{P}_0} c_e x_e^* = \sum_{e \in \tilde{P}_1} c_e x_e^*$$

Ansonsten wären wir nicht optimal! (Warum?)

Betrachte nun

$$\tilde{x}_e^* = \begin{cases} x_e^* + \varepsilon & \text{falls } e \in \tilde{P}_0 \\ x_e^* - \varepsilon & \text{falls } e \in \tilde{P}_1 \end{cases}$$

Wähle ε so groß, dass für ein $e \in \tilde{P}_1$ $\tilde{x}_e^* = 0$ gilt. (Warum geht das immer?)

Damit enthält $\tilde{G}$ eine Kante weniger. $\sum_{e\in E} x^*_e c_e = \sum_{e\in E} \tilde{x}^*_e c_e$!

Dieser Prozess kann solange durchgeführt werden, solange nicht ganzzahlige Werte existieren.

Weiter: Da P_0 und P_1 austauschbar sind, war x^* keine Basislösung!

$\Rightarrow \exists$ optimale, ganzzahlige Basislösung.

Theorem: Relaxierung des VC-IP ist halb-integral.

Beweis: Betrachte opt. Basislösung x^* des LP.

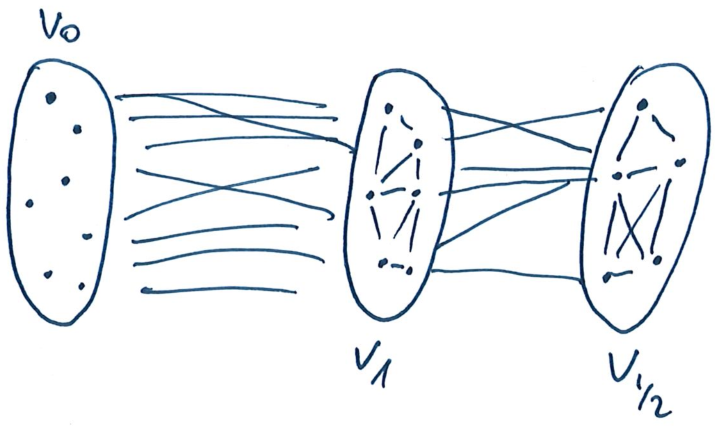
Teile die Knoten in drei Mengen $V_0, V_{\frac{1}{2}}, V_1$ auf, mit

$$V_0 := \{v \in V \mid x_v < \tfrac{1}{2}\}$$

$$V_{\frac{1}{2}} := \{v \in V \mid x_v = \tfrac{1}{2}\}$$

$$V_1 := \{v \in V \mid x_v > \tfrac{1}{2}\}$$

Wie sieht der Graph mit dieser Aufteilung aus?



Zwischen V_0 und $V_{1/2}$ können keine Kanten verlaufen!
V_0 besitzt keine Kanten!

Ziel: Beweise, dass x_v mit $v \in V_0$ auf 0 gesetzt werden können, wenn x_v mit $v \in V_1$ entsprechend angepasst werden, sodass:

(1) Wert der Lösung gleich bleibt.

(2) Lösung zulässig bleibt.

Angenommen, es existiert ein Matching zwischen V_0 und V_1*. Dann sind die Kosten für das VC an dieser Stelle mind. $|V_1|$ wegen $x_v + x_w \geq 1$

* welches V_1 überdeckt.

$\Rightarrow$ Setze $x_v = 0$ für $v \in V_0$, $x_v = 1$ für $v \in V_1$.

$\Rightarrow$ Lösung bleibt gültig und wird nicht teurer. *

Angenommen es existiert kein Matching zwischen V_0 und V_1, welches V_1 ~~überdeckt~~ nicht überdeckt.

Nach Satz von Hall (Graphentheorie - Matchings):

$$\exists X \subseteq V_1 : |N(x) \cap V_0| < |X|$$

Nachbarschaft von X in V_0

$\Rightarrow$ Reduziere Variablen in X und erhöhe Variablen in $N(x) \cap V_0$ um ε (auf je max $\frac{1}{2}$)

~~bis ein Knoten den Wert ½ annimmt~~

$\Rightarrow$ Lösung bleibt gültig, ist aber kleiner!

$\Rightarrow x^*$ war nicht optimal.

$$\Rightarrow \forall v \in V_0 : x_v = 0$$
$$\forall v \in V_{1/2} : x_v = \tfrac{1}{2}$$
$$\forall v \in V_1 : x_v = 1$$

$\Rightarrow$ Basislösung ist halb-integral.

* Etwas präziser: Gilt $|V_0| > |V_1|$, dann verbessern wir uns
$\Rightarrow x^*$ war nicht optimal
Gilt $|V_0| = |V_1|$, dann kann man auch alle in V_0 auf $\frac{1}{2}$, in V_1 auf $\frac{1}{2}$ setzen $\Rightarrow x^*$ keine Basislösung.