



# THÈSE

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE-METZ

Discipline : INFORMATIQUE

présentée par :

MOEINI MAHDI

Titre de la thèse :

LA PROGRAMMATION DC ET DCA POUR L'OPTIMISATION  
DE PORTEFEUILLE

Date de soutenance : 27 Juin 2008

Composition du Jury :

Président	Tao PHAM DINH	<i>Professeur, INSA de Rouen</i>
Rapporteurs	Gérard PLATEAU	<i>Professeur, Université Paris Nord</i>
	Adnan YASSINE	<i>Professeur, Université du Havre</i>
Examineurs	Van Thoai NGUYEN	<i>Professeur, Université de Trèves</i>
	Raymond BISDORFF	<i>Professeur, Université du Luxembourg</i>
Directrice	Hoai An LE THI	<i>Professeur, Université Paul Verlaine-Metz</i>

THÈSE PRÉPARÉE AU SEIN DU  
LABORATOIRE D'INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE (LITA)  
UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE-METZ



# Remerciements

La préparation de cette thèse, sous la direction de Madame le Professeur Hoai An LE THI, a été faite au sein du laboratoire LITA de l'université Paul Verlaine - Metz.

C'est une vieille tradition que de remercier au début d'un tel travail tous ceux qui, de loin ou de près, directement ou indirectement, ont contribué à le rendre possible. C'est avec mon enthousiasme le plus vif et le plus sincère que je voudrais rendre mérite à tous ceux qui à leur manière m'ont aidé à mener à bien cette thèse.

Je remercie en premier lieu Madame le Professeur Hoai An LE THI, ma directrice de thèse pour ses précieux conseils, son aide constant ainsi que pour la confiance qu'elle m'a accordée durant la préparation de la thèse.

Je tiens ensuite à remercier particulièrement Monsieur le Professeur Tao PHAM DINH, directeur de l'équipe Modélisation et Optimisation Appliquée de l'INSA de Rouen pour ses conseils et son attention constante. Je lui exprime toutes ma reconnaissance pour sa sympathie.

Messieurs les Professeurs Gérard PLATEAU et Adnan YASSINE m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs de ma thèse et de juger mon travail. Je les en remercie ici très vivement.

Je tiens aussi à remercier Messieurs les Professeurs Van Thoai NGUYEN et Raymond BISSORFF leur disponibilité et pour d'avoir accepté d'être membres du jury.

Je me permets également de remercier la Ministère de la Science, de la Recherche et de la Technologie (MSRT) de l'Iran pour l'aide financière qu'elle m'a attribuée.

Je témoigne toute mon affection et reconnaissance à ma famille pour les sacrifices qu'elle a faites pour me soutenir lors des moments difficiles.

Je remercie tous mes collègues et mes amis français, iraniens et vietnamiens rencontrés à Metz pour les moments agréables lors de mon séjour à Metz. Je remercie particulièrement Romuald, Thomas, Belaïd et Damien. Enfin je remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin et tous ceux qui m'ont motivé même inconsciemment.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>15</b>
<b>1</b>	<b>Introduction à la programmation DC et DCA</b>	<b>17</b>
1.1	Éléments de base de l'analyse DC . . . . .	18
1.1.1	Notations et propriétés . . . . .	18
1.1.2	Fonctions convexes polyédrales . . . . .	20
1.1.3	Fonction DC . . . . .	20
1.2	Optimisation DC . . . . .	22
1.2.1	Dualité DC . . . . .	23
1.2.2	Optimalité globale en optimisation DC . . . . .	24
1.2.3	Optimalité locale en optimisation DC . . . . .	25
1.3	DCA . . . . .	27
1.3.1	Principe de DCA . . . . .	27
1.3.2	Existence des suites générées . . . . .	28
1.3.3	Calcul des sous-gradients . . . . .	29
1.3.4	Optimisation DC polyédrale . . . . .	30
1.3.5	Interprétations de DCA . . . . .	31
<b>2</b>	<b>L'algorithme par Séparation et Evaluation (SE)</b>	<b>33</b>
2.1	Introduction . . . . .	33
2.2	Le cas général de SE . . . . .	34
2.2.1	Méthode de résolution et convergence . . . . .	35
2.2.2	Séparation et Evaluation avec des ensembles non réalisables . . . . .	39
2.2.3	Réalisation . . . . .	42

2.3	Les cas particuliers de SE . . . . .	46
2.3.1	Le domaine est non convexe . . . . .	46
2.3.2	La fonction objectif est non convexe . . . . .	48
<b>II</b>	<b>Gestion de portefeuille en finance : modèles et méthodes</b>	<b>53</b>
<b>3</b>	<b>Gestion de portefeuille : les notions de base</b>	<b>55</b>
3.1	Introduction . . . . .	55
3.1.1	Les rentabilités des actifs financiers . . . . .	56
3.1.2	Le risque . . . . .	57
3.2	Les critères . . . . .	58
3.2.1	Le critère de Maximum d'Espérance d'Utilité . . . . .	59
3.2.2	Dominance stochastique . . . . .	61
3.2.3	La cohérence . . . . .	63
3.3	Les mesures classiques de risque . . . . .	63
3.3.1	La variance . . . . .	64
3.3.2	La mesure de risque de baisse . . . . .	67
3.3.3	Le modèle de Mean-Absolute Deviation (MAD) . . . . .	67
3.3.4	Value at risk (VaR) et Value at Risk Conditionnel (CVaR) . . . . .	68
3.4	La classification des mesures de risque . . . . .	70
3.4.1	Une approche générale pour la représentation des mesures de risque . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Gestion de portefeuille sous les contraintes de seuil, de seuil d'achat et de cardinalité</b>	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	Le modèle moyenne-variance (MV) . . . . .	75
4.3	Contraintes de seuil d'achat . . . . .	76
4.3.1	Programmation DC et DCA pour la résolution du problème . . . . .	76
4.4	Contraintes de cardinalité . . . . .	81
4.4.1	Programmation DC et DCA pour la résolution du problème . . . . .	84
4.5	Contraintes de seuil . . . . .	90

4.5.1	Reformulation . . . . .	91
4.5.2	Résolution de $(P_{seuil}^{DC})$ par DCA . . . . .	95
4.5.3	Résolution globale de $(P_{seuil})$ . . . . .	97
4.6	Conclusion . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Gestion de portefeuille avec la mesure de risque de baisse sous les contraintes de cardinalité</b>	<b>107</b>
5.1	Introduction . . . . .	107
5.2	Description et formulation . . . . .	108
5.3	Contraintes de cardinalité . . . . .	114
5.4	Programmation DC et DCA pour la résolution du problème . . . . .	115
5.4.1	Reformulation . . . . .	115
5.4.2	Résolution de $(P_{DC})$ par DCA . . . . .	116
5.5	Résolution globale . . . . .	118
5.6	Expériences numériques . . . . .	118
5.7	Conclusion . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Gestion de portefeuille sous les fonctions de coûts de transaction non convexes</b>	<b>123</b>
6.1	Introduction . . . . .	123
6.2	Description et formulation . . . . .	125
6.2.1	Modèle de Déviation Moyenne-Absolue (MAD) . . . . .	125
6.2.2	Coûts de transaction . . . . .	128
6.2.3	Le modèle de choix de portefeuille sous les coûts de transaction . . . . .	129
6.2.4	Formulation 0 – 1 du modèle de choix de portefeuille sous les coûts de transaction en escalier . . . . .	130
6.3	Approximation des fonctions de coûts de transaction . . . . .	131
6.3.1	Approximation de la fonction $f_u$ par des fonctions DC polyédrales . . . . .	131
6.3.2	Approximation de la fonction objectif de $(P)$ . . . . .	135
6.4	Résolution de $(P_{DC})$ par DCA . . . . .	135
6.4.1	Calcul de $\partial H(x, \psi, \phi)$ . . . . .	136
6.4.2	Calcul de $\partial \left( (G - \sum_{u=1}^n r_u x_u) + \chi_{\mathcal{D}} \right)^* (y^k, \xi^k, \eta^k)$ . . . . .	136

6.4.3	Algorithme de DCA pour résoudre ( $P_{DC}$ ) . . . . .	137
6.4.4	Trouver un bon point de départ pour DCA . . . . .	137
6.5	Résolution globale du problème ( $P$ ) . . . . .	138
6.6	Expériences numériques . . . . .	139
6.6.1	Commentaires sur les résultats . . . . .	143
6.6.2	Influence des fonctions de coût de transaction . . . . .	147
6.7	Conclusion . . . . .	148
<b>7</b>	<b>Une analyse au pire des cas pour l'investissement robuste en gestion de portefeuille en présence de contraintes de cardinalité</b>	<b>151</b>
7.1	Introduction . . . . .	151
7.2	Description et formulation . . . . .	152
7.2.1	Modèle MV . . . . .	153
7.2.2	Modèle min-max pour les décisions robustes . . . . .	154
7.2.3	Robustesse du modèle min-max . . . . .	155
7.3	Contraintes de cardinalité . . . . .	156
7.4	Programmation DC et DCA pour la résolution du problème . . . . .	157
7.4.1	Reformulation . . . . .	157
7.4.2	Résolution de ( $P_{DC}$ ) par DCA . . . . .	158
7.5	Expériences numériques . . . . .	158
7.5.1	Résultats numériques . . . . .	161
7.6	Conclusion . . . . .	168



# Table des figures

2.1	Un schéma de base pour un algorithme par SE pour les problèmes mixtes . . .	47
2.2	Un schéma de base pour un algorithme par SE révisé (combiné avec DCA) .	49
3.1	Exemple de la courbe des portefeuilles efficients . . . . .	65
3.2	VaR et CVaR en $\beta\%$ de confiance et la fonction de densité $f$ . . . . .	69
4.1	Les optimums globaux et les valeurs optimales fournies par DCA . . . . .	100
4.2	CPU en seconde . . . . .	103
4.3	Le nombre d'itération de chaque algorithme . . . . .	104
4.4	Le nombre de relance de DCA pendant l'exécution de l'approche combinée (SE-DCA) . . . . .	105
6.1	Fonctions des coûts de transaction . . . . .	128
6.2	Fonction des coûts de transaction non convexe et constante par morceaux .	129
6.3	Les points supplémentaires . . . . .	132
6.4	Les fonctions convexes polyédrales . . . . .	132
6.5	Les fonctions linéaires par morceaux $F_u(x_u)$ . . . . .	133
6.6	Enveloppe convexe de fonction de coûts de transaction en escalier . . . . .	139
6.7	Séparation sur un intervalle . . . . .	139
6.8	Le nombre d'actifs composant le portefeuille, sans et avec les coûts de transaction	147
6.9	Le nombre d'actifs composant le portefeuille, sans et avec les coûts de transaction	149
7.1	Les stratégies min-max avec un seul scénario de rendement et avec multiples scénarios de rendement . . . . .	165
7.2	Evaluation croisée avec un seul scénario de rendement . . . . .	166

7.3	Non-infériorité de min-max . . . . .	167
7.4	Analyse au pire des cas . . . . .	169

# Liste des tableaux

4.1	La performance de l'algorithme pour le premier jeu de données en utilisant deux algorithmes par SE . . . . .	82
4.2	La performance de l'algorithme pour le deuxième jeu de données en utilisant l'algorithme par SE (le deuxième) . . . . .	83
4.3	La performance des algorithmes pour les différentes valeurs de cardinalité . .	89
4.4	La performance des algorithmes pour le premier jeu de données (S&P 100) en utilisant l'algorithme par SE et l'approche combinée . . . . .	101
4.5	La performance des algorithmes pour le deuxième jeu de données (Dax 100) en utilisant l'algorithme par SE et l'approche combinée . . . . .	102
5.1	La performance des algorithmes pour le premier ensemble de paramètres . .	120
5.2	La performance des algorithmes pour le deuxième ensemble de paramètres .	121
6.1	Les coûts de transaction . . . . .	140
6.2	La performance des algorithmes pour le premier jeu de données ( <i>S&amp;P</i> ) . . .	141
6.3	La performance des algorithmes pour le deuxième jeu de données . . . . .	142
6.4	La performance des algorithmes pour le troisième jeu de données ( <i>Russell</i> ) .	144
6.5	La performance des algorithmes pour le troisième jeu de données ( <i>Russell</i> ) .	145
6.6	La performance des algorithmes pour le troisième jeu de données ( <i>Russell</i> ) .	146
7.1	Les résultats pour différentes valeurs de <i>card</i> . Puisque $\alpha = 1.0$ alors les valeurs de <i>Risque</i> correspondent aux valeurs optimales de fonction objectif. . . . .	162
7.2	Comparaisons des résultats pour un seul scénario . . . . .	163
7.3	Comparaisons des résultats pour trois scénarios . . . . .	164



# Introduction générale

## Contexte général et problématique

L'optimisation est à la fois une science et un outil largement utilisée dans divers domaines scientifiques, en ingénierie comme en industrie, qui nous aide à prendre la meilleure décision pour un grand nombre de décisions possibles. L'optimisation s'efforce à la fois de construire des méthodes de calcul pour trouver des solutions optimales, d'explorer les propriétés théoriques et d'étudier l'efficacité numérique des algorithmes.

Il n'est exagéré de dire que chacun utilise l'optimisation dans sa vie d'une façon ou d'une autre. Parmi les éminentes applications d'optimisation nous pouvons citer la gestion de portefeuille, la planification de production, les réseaux informatiques, différentes filières d'ingénierie, etc. Pour résoudre ces problèmes, l'optimisation offre un cadre algorithmique très riche. Dans cette étude, il nous faut d'abord distinguer deux filières d'optimisation :

- les modèles d'optimisation stochastique,
- les modèles d'optimisation déterministe.

Cette thèse se cadre dans le contexte d'optimisation déterministe qui à son tour, se divise à deux branches : la programmation convexe et la programmation non convexe. Un programme convexe ou un problème d'optimisation convexe est celui de la minimisation d'une fonction (objectif) convexe sous un ensemble convexe des contraintes. Lorsque la double convexité chez l'objectif et les contraintes n'est pas vérifiée, nous sommes en face d'un problème d'optimisation non convexe. La double convexité d'un programme convexe permet d'établir des caractérisations (sous forme de conditions nécessaires et suffisantes) de solutions optimales et ainsi de construire des méthodes itératives convergeant vers des solutions optimales. Théoriquement nous pouvons résoudre tout programme convexe. L'absence de cette double convexité rend la résolution d'un programme non convexe difficile voire impossible dans l'état actuel des choses. Contrairement à la programmation convexe, les solutions optimales locales et globales sont à distinguer dans un programme non convexe. D'autre part si nous disposons des caractérisations d'optimalité locale utilisables, au moins pour la classe des programmes non convexes assez réguliers, qui permettent la construction des méthodes convergeant vers des solutions locales (algorithmes locaux) il n'y a par contre pas de caractérisations d'optimalité globale sur lesquelles sont basées les méthodes itératives convergeant vers des solutions globales (algorithmes globaux). L'analyse et l'optimisation convexes modernes se voient ainsi contrainte à une extension logique et naturelle à la non convexité et à la non différentiabilité.

Les méthodes numériques conventionnelles de l'optimisation convexe ne fournissent que des minima locaux bien souvent éloignés de l'optimum global.

L'optimisation non convexe connaît une explosion spectaculaire depuis d'une quinzaine d'années car dans les milieux industriels, on a commencé à remplacer les modèles convexes par des modèles non convexes plus complexes mais plus fiables qui présentent mieux la nature des problèmes étudiés. Durant ces dernières années, la recherche en optimisation non convexe a largement bénéficié des efforts des chercheurs et s'est enrichie de nouvelles approches. Nous pouvons distinguer deux approches différentes mais complémentaires en programmation non convexe :

- i) Approches globales combinatoires : elles sont basées sur les techniques combinatoires de la Recherche Opérationnelle. Elles consistent à localiser les solutions optimales à l'aide des méthodes d'approximation, des techniques de coupe, des méthodes de décomposition, des algorithmes par séparation et évaluation. Elles ont connu de très nombreux développements importants au cours de ces dernières années à travers les travaux de H. TUY (reconnu comme le pionnier), R. HORST, P. PARDALOS et N. V. THOAI ([47, 48, 49, 50]). L'inconvénient majeur des méthodes globales est leur lourdeur (engorgement en places-mémoires) et leur coût trop important. Elles ne sont pas applicables aux problèmes d'optimisation non convexes réels qui sont souvent de très grande dimension.
- ii) Approches locales et globales d'analyse convexe qui sont basées sur l'analyse et l'optimisation convexe. Ici la programmation DC (Différence de deux fonctions Convexes) et DCA (DC Algorithmes) jouent le rôle central car la plupart des problèmes d'optimisation non convexe sont formulés/reformulés sous la forme DC. Sur le plan algorithmique, l'essentiel repose sur les algorithmes de l'optimisation DC (DCA) introduits par T. PHAM DINH en 1985 à l'état préliminaire et développés intensivement à travers de nombreux travaux communs de H.A LE THI et T. PHAM DINH depuis 1993 pour devenir maintenant classiques et de plus en plus utilisés par des chercheurs et praticiens de par le monde, dans différents domaines des sciences appliquées.

Les travaux de cette thèse se situent dans le cadre de la programmation non convexe. Ils s'appuient principalement sur la programmation DC et DCA. Cette démarche est motivée par la robustesse et la performance de la programmation DC et DCA comparées à des méthodes existantes, leur adaptation aux structures des problèmes traités et leur capacité de résoudre des problèmes industriels de très grande dimension. A notre connaissance, DCA fait actuellement partie des rares algorithmes de la programmation non convexe étant capables de traiter des problèmes (différentiables ou non) de très grande dimension.

Un programme DC est de la forme

$$(P_{dc}) \quad \alpha = \inf \{ f(x) := g(x) - h(x) : x \in \mathbb{R}^n \}$$

où  $g, h \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n)$ , le cône convexe de toutes les fonctions convexes semi-continues inférieurement et propres sur  $\mathbb{R}^n$ . Une telle fonction  $f$  est appelée fonction DC et  $g$  et  $h$

des composantes DC de  $f$ . La programmation DC est une extension de la Programmation Convexe : cette extension est assez large pour couvrir la quasi-totalité des programmes non convexes. DCA est une approche locale qui travaille avec les deux fonctions convexes  $g$  et  $h$  (dont la différence est la fonction objectif elle-même du programme DC) et non avec la fonction objectif, i.e.,  $f$ . Puisqu'une fonction DC admet une infinité de décompositions DC, il y a une infinité de DCA appliqués à un programme DC. Et les impacts de ces décompositions DC sur les qualités des DCA correspondants (rapidité, robustesse, globalité, ...) sont importants. La résolution d'un problème concret par DCA devrait répondre aux deux questions cruciales :

- La recherche d'une *bonne* décomposition DC : cette question est largement ouverte. En pratique on cherche des décompositions DC bien adaptées à la structure des problèmes traités. Les techniques de reformulation sont souvent utilisées et très efficaces pour l'obtention des décompositions DC intéressantes.
- La recherche d'un *bon* point initial : cette recherche est basée sur la combinaison de DCA avec les méthodes globales de type Séparation et Evaluation (SE) et/ou Approximation de l'Extérieur (AE) et/ou sur l'hybridation de DCA et les algorithmes heuristiques.

### Cadre de la thèse, objets et objectifs, motivations

Cette thèse est consacrée à la modélisation et l'optimisation non convexe basées sur *la programmation DC et DCA* pour certains problèmes en *finance*.

Il y a plus d'un demi-siècle, la gestion de portefeuille était à un carrefour avec la publication de l'article de Harry Markowitz [112]. Il a été le pionnier du premier traitement rigoureux du dilemme de l'investisseur, à savoir comment atteindre de plus grands profits tout en minimisant le risque. Pour son approche Moyenne-Variance (MV) dans la sélection de portefeuille, H. Markowitz a reçu le prix Nobel d'économie en 1990 (partagé avec M.H. Miller et W. Sharpe). Depuis ce temps, l'analyse de moyenne-variance demeure un sujet qui génère beaucoup d'intérêt parmi les chercheurs et les praticiens.

Avec les progrès technologiques des dernières années, le développement des algorithmes exploitant les nombreuses découvertes en mathématiques financières est en pleine expansion. Il nous suffit de consulter les articles sur internet pour en mesurer la portée.

Le modèle MV de Markowitz utilise la variance pour mesurer le risque. Après l'introduction du modèle MV par Markowitz, des nombreux modèles ont été mis en œuvre qui utilisent d'autres mesures de risque comme semivariance ou le modèle Mean-Absolute Deviation (MAD), etc ([62], [113]). Chaque modèle a ses avantages et ses inconvénients. Grâce aux progrès technologiques, ces modèles se résolvent facilement, même pour les problèmes de grande taille. Si nous voulons rendre les modèles plus réalistes, nous aurons besoin d'introduire des termes non convexes ou des variables discrètes ([33], [54]). Les coûts de transaction et les contraintes de cardinalité sont deux exemples bien connus. Pour résoudre les problèmes qui contiennent des termes non convexes, nous avons besoin d'utiliser les approches d'optimisation globale.

Malheureusement, il existe relativement peu d'application de ces méthodes en finance. La raison principale est du fait que depuis longtemps, jusqu'au milieu des années 80, la programmation non convexe était négligée sous prétexte que la résolution d'un programme non convexe de façon déterministe est limitée aux applications très particulières. Les méthodes heuristiques étaient reconnues comme les seuls moyens permettant de traiter des problèmes non convexes sans forme particulière [54]. Donc, les chercheurs en finance ne sont pas au courant des progrès récents en optimisation non convexe. Par conséquent, soit ils formulent les problèmes sous la forme de programmation convexe, soit ils appliquent des méthodes heuristiques. Dans le but de corriger cet esprit, le document présent se propose de développer des outils à la prise de décision financière. Surtout, le but de cette thèse est de présenter des applications réussies des méthodes de programmation DC et DCA en gestion de portefeuille.

Notre travail en Programmation DC et DCA pour la modélisation, la conception et la réalisation des DCA bien adaptés aux structures spécifiques des problèmes choisis est composé de :

- Etude approfondie des modèles d'optimisation non convexe et la modélisation DC des problèmes ; Formulations et reformulations des programmes DC équivalents, choix des décompositions DC les mieux adaptées, choix de meilleur point initial pour démarrer DCA.
- Mis en œuvre des schémas de DCA correspondant.
- Combinaison de DCA et d'autres approches pour chercher les bons points initiaux pour DCA et/ou pour prouver la globalité des solutions obtenues par DCA.
- Implémentations et simulations numériques comparatives.

Les modèles traités au cours de la thèse sont :

- *Gestion de portefeuille sous les contraintes de seuil d'achat, de seuil et de cardinalité* : ce sont trois modèles tels que chacun d'entre eux est une généralisation du modèle MV de Markowitz. Les contraintes de cardinalité limitent le nombre d'actifs composant le portefeuille et les contraintes de seuil et seuil d'achat empêchent des très petits investissements dans chaque actif. Les modèles généralisés sont non convexes et par conséquent difficiles à résoudre par des méthodes classiques.
- *Gestion de portefeuille avec la mesure de risque de baisse sous les contraintes de cardinalité* : la mesure de risque choisie est de type *de baisse*. La présence des contraintes de cardinalité exigent une formulation de programmation mixte en variables binaires. L'utilisation de la mesure de risque de baisse est liée aux défauts du modèle MV.
- *Gestion de portefeuille avec les fonctions des coûts de transaction en escalier* : Il s'agit de la présence des fonctions de coûts de transaction concave et plus précisément les fonctions constantes par morceaux. Ces fonctions des coûts de transaction sont utilisées pour les transactions sur Internet. Le travail consiste à résoudre le problème pour un nombre important d'actifs et un nombre suffisamment grand de morceaux de fonctions de coût.
- *Investissement robuste en gestion de portefeuille en présence des contraintes de cardinalité* : un défi important en gestion de portefeuille est la robustesse des stratégies d'investissement proposés par des modèles. Le modèle min-max étudié dans ce travail est une



généralisation du modèle MV de Markowitz tel que plusieurs scénarios d'investissement sont examinés au lieu d'un seul. C'est la raison pour laquelle la stratégie proposée par le modèle est robuste dans le sens où si un autre scénario se réalise la stratégie d'investissement sera la meilleure. De plus le modèle contient des contraintes de cardinalité et des contraintes de borne telles que l'on puisse avoir du contrôle sur l'investissement dans chaque actif.

Du point de vue mathématiques, les problèmes étudiés dans cette thèse sont classés en trois catégories :

1. *La programmation linéaire/quadratique en variables mixtes binaires sous des contraintes linéaires/quadratiques* (la gestion de portefeuille sous les contraintes de seuil d'achat et de cardinalité, l'investissement robuste en gestion de portefeuille sous les contraintes de cardinalité). Bien qu'il s'agisse des problèmes d'optimisation combinatoire, nous les reformulons, grâce à la pénalité exacte, comme un problème d'optimisation continue qui est en fait un programme DC. En plus de DCA, nous développons une méthode combinée de DCA et SE pour résoudre le problème.
2. *La programmation quadratique en variables mixtes binaires sous les contraintes de complémentarité* (la gestion de portefeuille sous les contraintes de seuil). La présence des contraintes de complémentarité rend le problème de plus en plus difficile. Nous proposons une nouvelle fonction de pénalité qui prend en compte non seulement les variables binaires mais aussi les contraintes de complémentarité. Ensuite, nous reformulons le modèle, grâce à la pénalité exacte, comme un problème de programmation DC. Nous développons une approche combinée de DCA et SE pour résoudre le problème.
3. *La minimisation d'une fonction non convexe et non lisse sur un ensemble convexe* (la gestion de portefeuille avec les fonctions des coûts de transaction en escalier). Le problème est non convexe et non lisse à cause des fonctions constantes par morceaux. La méthode traditionnelle pour résoudre les problèmes prenant en compte les fonctions en escalier consiste à les reformuler en introduisant des variables binaires, ce qui rend le problème lourd et de plus en plus difficile à résoudre même avec les logiciels les plus puissants. Notre approche est de proposer des fonctions DC polyédrales afin d'estimer les fonctions de coûts, ensuite nous utilisons DCA pour résoudre le programme DC polyédral. Une procédure combinée de DCA et d'un algorithme par séparation et évaluation est proposée.

## Organisation de la thèse

La thèse est divisée en deux parties et est composée de sept chapitres. Dans la première partie intitulée "Méthodologie" nous présentons des outils théoriques et algorithmiques servant des références aux autres. Le premier chapitre concerne la programmation DC et DCA tandis que le deuxième porte sur les algorithmes par séparation et évaluation. Dans la deuxième partie nous développons la programmation DC et DCA pour la résolution des problèmes en finance. Nous commençons par une introduction à la gestion de portefeuille (le chapitre trois). Le

Chapitre 4 est dédié aux généralisations du modèle MV de Markowitz, où nous étudions le modèle MV sous les contraintes de seuil d'achat, de seuil et de cardinalité. Le Chapitre 5 est consacré à la mesure de risque de baisse et les contraintes de cardinalité. Le Chapitre 6 porte sur le problème de choix de portefeuille avec les fonctions des coûts de transaction en escalier. L'investissement robuste en gestion de portefeuille sous les contraintes de cardinalité est développé dans le dernier chapitre.

# Première partie

## Méthodologie



# Chapitre 1

## Introduction à la programmation DC et DCA

Le cadre des *programmes convexes* s'est avéré trop étroit et, à la notion de fonction convexe a succédé avec bonheur, celle plus générale, de fonction DC (différence de fonctions convexes). Les fonctions DC possèdent de nombreuses propriétés importantes qui ont été établies à partir des années 50 par Alexandroff (1949), Landis (1951) et Hartman (1959), une des principales propriétés est leur stabilité relative aux opérations fréquemment utilisées en optimisation. Cependant, il faut attendre le milieu des années 80 pour que la classe des fonctions DC soit introduite en optimisation, élargissant ainsi la classification des problèmes d'optimisation avec l'apparition de la programmation DC. On distingue deux grandes approches DC :

1. L'approche combinatoire (cette terminologie est due au fait que les nouveaux outils introduits ont été inspirés par les concepts de l'optimisation combinatoire) en optimisation globale continue, et
2. L'approche de l'analyse convexe en optimisation non convexe.

Les algorithmes de l'approche combinatoire utilisent les techniques de l'optimisation globale (méthode de séparation et d'évaluation, technique de coupe, méthodes d'approximation fonctionnelle et ensembliste) ; ces algorithmes relativement sophistiqués sont plutôt lourds à mettre en oeuvre, ils doivent donc être réservés à des problèmes de dimensions raisonnables possédant des structures bien adaptées aux méthodes lorsqu'il est important d'isoler l'optimum global.

Le pionnier de cette approche est H. Tuy dont le premier travail remonte à 1964. Ses travaux sont abondants, citons les livres de Horst-Tuy ([174, 175]) qui présentent la théorie, algorithmes et applications de l'optimisation globale. Viennent ensuite les principales contributions de l'Ecole Américaine (P. M. Pardalos, J. B. Rosen,...), Allemande (R. Horst, ...), Française (Le Thi Hoai An, Pham Dinh Tao,...) et l'Ecole Vietnamiennne (Phan Thien Thach, Le Dung Muu, ...).

La seconde approche repose sur l'arsenal puissant d'analyse et l'optimisation convexes. Son premier travail dû à Pham Dinh Tao (1975) concerne le calcul des normes matricielles (problème fondamental en analyse numérique) qui est un problème de maximisation d'une fonction convexe sur un convexe. Le travail de Toland (1978) ([168]) sur la dualité et l'optimalité locale en optimisation DC généralise de manière élégante les résultats établis par Pham en maximisation convexe. La théorie de l'optimisation DC est ensuite développée notamment par Pham Dinh Tao, J. B. Hiriart Urruty, Jean - Paul Penot, Phan Thien Thach, Le Thi Hoai An. Sur le plan algorithmique dans le cadre de la seconde approche, on dispose actuellement des DCA (DC Algorithms) introduits par Pham Dinh Tao (1986), qui sont basés sur les conditions d'optimalité et de dualité en optimisation DC. Mais il a fallu attendre les travaux communs de Le Thi Hoai An et Pham Dinh Tao (voir [70]-[104] et [135]-[140]) pour qu'il s'impose définitivement en optimisation non convexe comme étant des algorithmes les plus simples et performants, capables de traiter des problèmes de grande taille.

Nous reportons dans ce chapitre les principaux résultats relatifs à la programmation DC et DCA qui nous seront les plus utiles pour nos travaux. Ces résultats sont extraits de ceux présentés dans H. A. Le Thi 1994 ([70]), H. A. Le Thi 1997 ([71]). Pour une étude détaillée nous nous référons à ces deux références (voir également [70]-[104] et [135]-[140]).

## 1.1 Eléments de base de l'analyse DC

### 1.1.1 Notations et propriétés

Ce paragraphe est consacré à un rapide rappel d'analyse convexe pour faciliter la lecture de certains passages. Pour plus de détails, on pourra se référer aux ouvrages de P.J Laurent ([67]), de R.T Rockafellar ([146]) et d'A. Auslender ([6]). Dans toute la suite  $X$  désigne l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , muni du produit scalaire usuel noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme euclidienne associée  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$  et  $Y$  l'espace vectoriel dual de  $X$  relatif au produit scalaire, que l'on peut identifier à  $X$ . On note par  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  muni d'une structure algébrique déduite de celle de  $\mathbb{R}$  avec la convention que  $\infty - (+\infty) = +\infty$  ([146]). Étant donnée une fonction  $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  définie sur un ensemble  $S$  convexe de  $X$ , on appelle domaine effectif de  $f$  l'ensemble

$$\text{dom}(f) = \{x \in S : f(x) < +\infty\}$$

et épigraphe de  $f$

$$\text{epi}(f) = \{(x, a) \in S \times \mathbb{R} : f(x) < a\}.$$

Si  $\text{dom}(f) \neq \emptyset$  et  $f(x) > -\infty$  pour tout  $x \in S$  alors la fonction  $f(x)$  est dite propre.

Une fonction  $f : S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est dite convexe si son épigraphe est un ensemble convexe de  $\overline{\mathbb{R}} \times X$ . Ce qui est équivalent de dire que  $S$  est un ensemble convexe et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  on a

$$f((1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1 - \lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2) : \forall x^1, x^2 \in S. \quad (1.1)$$

On note alors  $Co(X)$  l'ensemble des fonctions convexes sur  $X$ .

Dans (1.1) si l'inégalité stricte est vérifiée pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$  et pour tout  $x^1, x^2 \in S$  avec  $x^1 \neq x^2$  alors  $f$  est dite strictement convexe.

On dit que  $f(x)$  est fortement convexe sur un ensemble convexe  $C$  s'il existe un nombre  $\rho > 0$  tel que

$$f((1 - \lambda)x^1 + \lambda x^2) \leq (1 - \lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2) - (1 - \lambda)\lambda \frac{\rho}{2} \|x^1 - x^2\|^2, \quad (1.2)$$

pour tout  $x^1, x^2 \in C$ , et pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ . Plus précisément  $f$  est fortement convexe sur  $C$  si

$$\rho(f, C) = \text{Sup}\{\rho \geq 0 : f - \frac{\rho}{2} \|\cdot\|^2 \text{ est convexe sur } C\} > 0. \quad (1.3)$$

Il est clair que si  $\rho(f, C) > 0$  alors (1.2) est vérifié pour tout  $\lambda \in [0, \rho(f, C)[$ . On dit que la borne supérieure est atteinte dans sa définition (1.3) si  $f - \frac{\rho(f, C)}{2} \|\cdot\|^2$  est convexe sur  $C$ . Si  $C \equiv X$  on notera  $\rho(f)$  au lieu de  $\rho(f, X)$ .

**Remarque 1.1**  $f$  fortement convexe  $\implies f$  strictement convexe  $\implies f$  convexe.

Soit une fonction convexe propre  $f$  sur  $X$ , un élément  $y^0 \in Y$  est dit un sous-gradient de  $f$  au point  $x^0 \in \text{dom}(f)$  si

$$\langle y^0, x - x^0 \rangle + f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

L'ensemble de tous les sous-gradients de  $f$  au point  $x^0$  est dit sous-différentiel de  $f$  au point  $x^0$  et est noté par  $\partial f(x^0)$ .

Étant donné un nombre positif  $\epsilon$ , un élément  $y^0 \in Y$  est dit  $\epsilon$ -sous-gradient de  $f$  au point  $x^0$  si

$$\langle y^0, x - x^0 \rangle + f(x^0) - \epsilon \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

L'ensemble de tous les  $\epsilon$ -sous-gradients de  $f$  au point  $x^0$  est dit  $\epsilon$ -sous-différentiel de  $f$  au point  $x^0$  et est noté par  $\partial_\epsilon f(x^0)$ .

La fonction  $f : S \implies \mathbb{R}$  est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en un point  $x \in S$  si

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x).$$

On note  $\Gamma_0(X)$  l'ensemble des fonctions convexes s.c.i. et propre sur  $X$ .

**Définition 1.1** Soit une fonction quelconque  $f : X \implies \mathbb{R}$ , la fonction conjuguée de  $f$ , notée  $f^*$ , est définie sur  $Y$  par

$$f^*(y) = \sup\{\langle x, y \rangle - f(x) : x \in X\}. \quad (1.4)$$

$f^*$  est l'enveloppe supérieure des fonctions affines continues  $y \mapsto \langle x, y \rangle - f(x)$  sur  $Y$ .

On résume dans la proposition suivante les principales propriétés dont on aura besoin pour la suite :

**Proposition 1.1** *Si  $f \in \Gamma_0(X)$  alors :*

- $f \in \Gamma_0(X) \iff f^* \in \Gamma_0(Y)$ . Dans ce cas on a  $f = f^{**}$ ,
- $y \in \partial f(x) \iff f(x) + f^*(y) = \langle x, y \rangle$  et  $y \in \partial f(x) \iff x \in \partial f(y^*)$ ,
- $\partial f(x)$  est une partie convexe fermée,
- Si  $\partial f(x) = \{y\}$  alors  $f$  est différentiable en  $x$  et  $\nabla f(x) = y$ ,
- $f(x^0) = \min\{f(x), x \in X\} \iff 0 \in \partial f(x^0)$ .

### 1.1.2 Fonctions convexes polyédrales

Une partie convexe  $C$  est dite convexe polyédrale si

$$C = \bigcap_{i=1}^m \{x : \langle a_i, x \rangle - \alpha_i \leq 0\} \text{ où } a_i \in Y, \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Une fonction est dite convexe polyédrale si

$$f(x) = \sup\{\langle a_i, x \rangle - \alpha_i : i = 1, \dots, k\} + \chi_c(x)$$

où  $C$  est une partie convexe polyédrale et le symbole  $\chi_c$  désigne la fonction indicatrice de  $C$ , i.e.  $\chi_c(x) = 0$  si  $x \in C$  et  $+\infty$  sinon.

**Proposition 1.2** ([146])

- Soit  $f$  une fonction convexe polyédrale.  $f$  est partout finie si et seulement si  $C = X$ ,
- Si  $f$  est polyédrale alors  $f^*$  l'est aussi. De plus si  $f$  est partout finie alors

$$f(x) = \sup\{\langle a_i, x \rangle - \alpha_i : i = 1, \dots, k\},$$

$$\text{dom}(f^*) = \text{co}\{a_i : i = 1, \dots, k\},$$

$$f^*(y) = \min\{\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i : y = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}.$$

- Si  $f$  est polyédrale alors  $\partial f(x)$  est une partie convexe polyédrale non vide en tout point  $x \in \text{dom}(f)$ .

### 1.1.3 Fonction DC

Une fonction  $f : \Omega \mapsto [-\infty, +\infty]$  définie sur un ensemble convexe  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est dite DC sur  $\Omega$  si elle peut s'écrire comme la différence de deux fonctions convexes sur  $\Omega$ , i.e.

$$f(x) = g(x) - h(x),$$



où  $g$  et  $h$  sont des fonctions convexes sur  $\Omega$ . On note par  $DC(\Omega)$  l'ensemble des fonctions DC sur  $\Omega$ , et par  $DC_f(\Omega)$  le cas où les fonctions  $g$  et  $h$  sont convexes finies sur  $\Omega$ .

Les fonctions DC possèdent de nombreuses propriétés importantes qui ont été établies à partir des années 50 par Alexandroff (1949), Landis (1951) et Hartman (1959); une des principales propriétés est leur stabilité relative aux opérations fréquemment utilisées en optimisation. Plus précisément

- Proposition 1.3** (i) Une combinaison linéaire de fonctions DC sur  $\Omega$  est DC sur  $\Omega$ ,  
(ii) L'enveloppe supérieure d'un ensemble fini de fonctions DC à valeur finie sur  $\Omega$  est DC sur  $\Omega$ ,  
L'enveloppe inférieure d'un ensemble fini de fonctions DC à valeur finie sur  $\Omega$  est DC sur  $\Omega$ ,  
(iii) Soit  $f \in DC_f(\Omega)$ , alors  $|f(x)|$ ,  $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$  et  $f^-(x) = \min\{0, f(x)\}$  sont DC sur  $\Omega$ .

Ces résultats se généralisent aux cas des fonctions à valeur dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ([71]). Il en résulte que l'ensemble des fonctions DC sur  $\Omega$  est un espace vectoriel ( $DC(\Omega)$ ) : c'est le plus petit espace vectoriel contenant l'ensemble des fonctions convexes sur  $\Omega$  ( $Co(\Omega)$ ).

**Remarque 1.2** Étant donnée une fonction DC  $f$  et sa représentation DC  $f = g - h$ , alors pour toute fonction convexe finie  $\varphi$ ,  $f = (g + \varphi) - (h + \varphi)$  donne une autre représentation DC de  $f$ . Ainsi, une fonction DC admet une infinité de décomposition DC.

Désignons par  $C^2(\mathbb{R}^n)$ , la classe des fonctions deux fois continûment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.4** Toute fonction  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  est DC sur un ensemble convexe compact quelconque  $\Omega \cup \mathbb{R}^n$ .

Puisque le sous-espace des polynômes sur  $\Omega$  est dense dans l'espace  $C(\Omega)$  des fonctions numériques continues sur  $\Omega$  on en déduit :

**Corollaire 1.1** L'espace des fonctions DC sur un ensemble convexe compact  $\Omega \cup \mathbb{R}^n$  est dense dans  $C(\Omega)$ , i.e.

$$\forall \epsilon > 0, \exists F \in C(\Omega) : |f(x) - F(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in \Omega.$$

Soulignons que les fonctions DC interviennent très fréquemment en pratique, aussi bien en optimisation différentiable que non différentiable. Un résultat important établi par Hartman (1959) permet d'identifier les fonctions DC dans de nombreuses situations, en ayant recours simplement à une analyse locale de la convexité (localement convexe, localement concave,

localement DC).

Une fonction  $f : D \mapsto \mathbb{R}$  définie sur un ensemble convexe ouvert  $D \in \mathbb{R}^n$  est dite localement DC si pour tout  $x \in D$  il existe un voisinage convexe ouvert  $U$  de  $x$  et une paire de fonctions convexes  $g, h$  sur  $U$  telle que  $f|_U = g|_U - h|_U$ .

**Proposition 1.5** *Une fonction localement DC sur un ensemble convexe  $D$  est DC sur  $D$ .*

## 1.2 Optimisation DC

De par la prépondérance et de la richesse des propriétés des fonctions DC, le passage du sous-espace  $Co(\Omega)$  à l'espace vectoriel  $DC(\Omega)$  permet d'élargir significativement les problèmes d'optimisation convexe à la non convexité tout en conservant une structure sous-jacente fondamentalement liée à la convexité. Le domaine des problèmes d'optimisation faisant intervenir des fonctions DC est ainsi relativement large et ouvert, couvrant la plupart des problèmes d'applications rencontrés.

Ainsi on ne peut d'emblée traiter tout problème d'optimisation non convexe et non différentiable. La classification suivante devenue maintenant classique :

- (1)  $\sup\{f(x) : x \in C\}$ ,  $f$  et  $C$  sont convexes
- (2)  $\inf\{g(x) - h(x) : x \in X\}$ ,  $g$  et  $h$  sont convexes
- (3)  $\inf\{g(x) - h(x) : x \in C, f_1(x) - f_2(x) \leq 0\}$ ,

où  $g, h, f_1, f_2$  et  $C$  sont convexes semble assez large pour contenir la quasi-totalité des problèmes non convexes rencontrés dans la vie courante. Le problème (1) est un cas spécial du problème (2) avec  $g = \chi_C$ , la fonction indicatrice de  $C$ , et  $h = -f$ . Le problème (2) peut être modélisé sous la forme équivalent de (1)

$$\inf\{t - h(x) : g(x) - t \leq 0\}.$$

Quant au problème (3) il peut être transformé sous la forme (2) via la pénalité exacte relative à la contrainte DC  $f_1(x) - f_2(x) \leq 0$ . Sa résolution peut être aussi ramenée, sous certaines conditions techniques, à celle d'une suite de problèmes (1).

Problème (2) est communément appelé *la programmation DC*. Elle est d'un intérêt majeur aussi bien d'un point de vue pratique que théorique. Du point de vue théorique, on peut souligner que, comme on a vu en haut, la classe des fonctions DC est remarquablement stable par rapport aux opérations fréquemment utilisées en optimisation. En outre, on dispose d'une élégante théorie de la dualité ([70, 71, 83, 129, 130, 168, 178]) qui, comme en

optimisation convexe, a de profondes répercussions pratiques sur les méthodes numériques.

Sur le plan algorithmique, les algorithmes de l'optimisation DC (DCA) dus à Pham Dinh Tao ([134, 135]) constituent une nouvelle approche originale basée sur la théorie DC. Ces algorithmes représentent en fait une généralisation des algorithmes de sous-gradients étudiés par le même auteur sur la maximisation convexe ([129, 134]). Cependant, il a fallu attendre les travaux communs de Le Thi et Pham au cours de ces quinze dernières années (voir [35], [70]-[104] et [135]-[140]) pour que les DCA deviennent maintenant classiques et populaires.

### 1.2.1 Dualité DC

En analyse convexe, le concept de la dualité (fonctions conjuguées, problème dual, etc.) est une notion fondamentale très puissante. Pour les problèmes convexes et en particulier linéaires, une théorie de la dualité a été développée depuis déjà plusieurs décennies ([146]). Plus récemment, en analyse non convexe d'importants concepts de dualité ont été proposés et développés, tout d'abord, pour les problèmes de maximisation convexe, avant de parvenir aux problèmes DC. Ainsi la dualité DC introduite par Toland (1978) peut être considérée comme une généralisation logique des travaux de Pham Dinh Tao (1975) sur la maximisation convexe. On va présenter ci-dessous les principaux résultats (en optimisation DC) concernant les conditions d'optimalité (locale et globale) et la dualité DC. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé au document de Le Thi (1997) (voir également [83]).

Soit l'espace  $X = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme euclidienne  $\|\cdot\|$ . Désignons par  $Y$  l'espace dual de  $X$  que l'on peut identifier à  $X$  lui-même et par  $\Gamma_0(X)$  l'ensemble de toutes les fonctions propres s.c.i. sur  $X$ .

Soient  $g(x)$  et  $h(x)$  deux fonctions convexes propres sur  $X$  ( $g, h \in \Gamma_0(X)$ ), considérons le problème DC

$$\inf\{g(x) - h(x) : x \in X\} \quad (P)$$

et le problème dual

$$\inf\{h^*(y) - g^*(y) : y \in Y\} \quad (D)$$

où  $g^*(y)$  désigne la fonction conjuguée de  $g$ .

Ce résultat de dualité DC défini à l'aide des fonctions conjuguées donne une importante relation en optimisation DC ([168]).

**Théorème 1.1** Soient  $g$  et  $h \in \Gamma_0(X)$ , alors

(i)

$$\inf_{x \in \text{dom}(g)} \{g(x) - h(x)\} = \inf_{y \in \text{dom}(h^*)} \{h^*(y) - g^*(y)\} \quad (1.5)$$

(ii) Si  $y^0$  est un minimum de  $h^* - g^*$  sur  $Y$  alors chaque  $x^0 \in \partial g^*(y^0)$  est un minimum de  $g - h$  sur  $X$ .

**Preuve :**

(i)

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf\{g(x) - h(x) : x \in X\} \\ &= \inf\{g(x) - \sup\{\langle x, y \rangle - h^*(y) : y \in Y\} : x \in X\} \\ &= \inf\{g(x) + \inf\{h^*(y) - \langle x, y \rangle : y \in Y\} : x \in X\} \\ &= \inf_x \inf_y \{h^*(y) - \langle x, y \rangle - g(x)\} \\ &= \inf\{h^*(y) - g^*(y) : y \in Y\}. \end{aligned}$$

(ii) cf. Toland ([168]).

□

Le théorème (1.1) montre que résoudre le problème primal ( $P$ ) implique la résolution du problème dual ( $D$ ) et vice-versa.

De par la parfaite symétrie entre le problème primal ( $P$ ) et le problème dual ( $D$ ), il apparaît clairement que les résultats établis pour l'un se transpose directement à l'autre. Cependant, nous choisissons ici de ne pas les présenter simultanément afin de simplifier la présentation.

## 1.2.2 Optimalité globale en optimisation DC

En optimisation convexe,  $x^0$  minimise une fonction  $f \in \Gamma_0(X)$  si et seulement si  $0 \in \partial f(x^0)$ . En optimisation DC, la condition d'optimalité globale suivante ([179]) est formulée à l'aide des  $\epsilon$ -sous-différentiels de  $g$  et  $h$ . Sa démonstration (basée sur l'étude du comportement du  $\epsilon$ -sous-différentiel d'une fonction convexe en fonction du paramètre  $\epsilon$ ) est compliquée. La démonstration dans [71] est plus simple et convient bien au cadre de l'optimisation DC : elle exprime tout simplement que cette condition d'optimalité globale est une traduction géométrique de l'égalité des valeurs optimales dans les programmes DC primal et dual.

**Théorème 1.2 (Optimalité globale DC)** Soit  $f = g - h$  où  $g, h \in \Gamma_0(X)$  alors.  $x^0$  est un minimum global de  $g(x) - h(x)$  sur  $X$  si et seulement si,

$$\partial_\epsilon h(x^0) \subset \partial_\epsilon g(x^0) \quad \forall \epsilon > 0. \quad (1.6)$$

**Remarque 1.3** –

(i) Si  $f \in \Gamma_0(X)$ , on peut écrire  $f = g - h$  avec  $f = g$  et  $h = 0$ . Dans ce cas l'optimalité globale dans ( $P$ ) - qui est identique à l'optimalité locale car ( $P$ ) est un problème convexe - est caractérisée par,

$$0 \in \partial f(x^0). \quad (1.7)$$

Du fait que  $\partial_\epsilon h(x^0) = \partial h(x^0) = \{0\}$ ,  $\forall \epsilon > 0, \forall x \in X$ , et la croissance du  $\epsilon$ -sousdifférentiel en fonction de  $\epsilon$ , la relation (1.7) est équivalente à (1.6).

(ii) D'une manière plus générale, considérons les décompositions DC de  $f \in \Gamma_0(X)$  de la forme  $f = g - h$  avec  $g = f + h$  et  $h \in \Gamma_0(X)$  finie partout sur  $X$ . Le problème DC correspondant est un "faux" problème DC car c'est un problème d'optimisation convexe. Dans ce cas, la relation (1.7) est équivalente à

$$\partial h(x^0) \subset \partial g(x^0).$$

(iii) On peut dire ainsi que (1.6) marque bien le passage de l'optimisation convexe à l'optimisation non convexe. Cette caractéristique de l'optimalité globale de (P) indique en même temps toute la complexité de son utilisation pratique car il fait appel à tous les  $\epsilon$ -sous-différentiels en  $x^0$ .

### 1.2.3 Optimalité locale en optimisation DC

Nous avons vu que la relation  $\partial h(x^0) \subset \partial g(x^0)$  (faisant appel au sous-différentiel "exact") est une condition nécessaire et suffisante d'optimalité globale pour un "faux" problème DC (problème d'optimisation convexe). Or dans un problème d'optimisation globale, la fonction à minimiser est localement convexe "autour" d'un minimum local, il est alors clair que cette relation d'inclusion sous-différentielle permettra de caractériser un minimum local d'un problème DC.

**Définition 1.2** Soient  $g$  et  $h \in \Gamma_0(X)$ . Un point  $x^\bullet \in \text{dom}(g) \cap \text{dom}(h)$  est un minimum local de  $g(x) - h(x)$  sur  $X$  si et seulement si

$$g(x) - h(x) \geq g(x^\bullet) - h(x^\bullet), \quad \forall x \in V_{x^\bullet}, \quad (1.8)$$

où  $V_{x^\bullet}$  désigne un voisinage de  $x^\bullet$ .

**Proposition 1.6 (Condition nécessaire d'optimalité locale)** Si  $x^\bullet$  est un minimum local de  $g - h$  alors

$$\partial h(x^\bullet) \subset \partial g(x^\bullet). \quad (1.9)$$

**Preuve :** Si  $x^\bullet$  est un minimum local de  $g - h$ , alors il existe un voisinage  $V_{x^\bullet}$  de  $x^\bullet$  tel que

$$g(x) - g(x^\bullet) \geq h(x) - h(x^\bullet), \quad \forall x \in V_{x^\bullet}. \quad (1.10)$$

Par la suite si  $y^\bullet \in \partial h(x^\bullet)$  alors

$$g(x) - g(x^\bullet) \geq \langle x - x^\bullet, y^\bullet \rangle, \quad \forall x \in V_{x^\bullet}. \quad (1.11)$$

Ce qui est équivalent, en vertu de la convexité de  $g$ , à  $y^\bullet \in \partial g(x^\bullet)$ . □

Remarquons que pour un certain nombre de problème DC et en particulier pour  $h$  polyédrale, la condition nécessaire (1.9) est également suffisante, comme nous le verrons un peu plus loin. On dit que  $x^\bullet$  est un point critique de  $g - h$  si  $\partial h(x^\bullet) \cup \partial g(x^\bullet)$  est non vide ([168]). C'est une forme affaiblie de l'inclusion sousdifférentielle. La recherche d'un tel point critique est à la base de DCA (forme simple) qui sera étudiée dans la section suivante. En général DCA converge vers une solution locale d'un problème d'optimisation DC. Cependant sur le plan théorique, il est important de formuler des conditions suffisantes pour l'optimalité locale.

**Théorème 1.3** (*Condition suffisante d'optimalité locale ([71, 83])*) Si  $x^*$  admet un voisinage  $V$  tel que

$$\partial h(x) \cap \partial g(x^*) \neq \emptyset, \quad \forall x \in V \cap \text{dom}(g), \quad (1.12)$$

alors  $x^*$  est un minimum local de  $g - h$ .

**Corollaire 1.2** Si  $x^* \in \text{int}(\text{dom}(h))$  vérifie

$$\partial h(x^*) \subset \text{int}(\partial g(x^*)),$$

alors  $x^*$  est un minimum local de  $g - h$ .

**Corollaire 1.3** Si  $h \in \Gamma_0(X)$  est convexe polyédrale alors  $\partial h(x) \subset \partial g(x)$  est une condition nécessaire et suffisante pour que  $x$  soit un minimum local de  $g - h$ .

**Preuve :** Ce résultat généralise le premier obtenu par C. Michelot dans le cas où  $g, h \in \Gamma_0(X)$  sont finies partout et  $h$  convexe polyédrale (cf. ([71, 83])).  $\square$

Pour résoudre un problème d'optimisation DC, il est parfois plus facile de résoudre le problème dual ( $D$ ) que le problème primal ( $P$ ). Le théorème (1.1) assure le transport par dualité des minima globaux. On établit de même le transport par dualité des minima locaux.

**Corollaire 1.4** (*Transport par dualité DC des minima locaux ([71, 83])*) Supposons que  $x^\bullet \in \text{dom}(\partial h)$  soit un minimum local de  $g - h$ , soient  $y^\bullet \in \partial h(x^\bullet)$  et  $V_{x^\bullet}$  un voisinage de  $x^\bullet$  tel que  $g(x) - h(x) \geq g(x^\bullet) - h(x^\bullet)$ ,  $\forall x \in V_{x^\bullet} \cap \text{dom}(g)$ . Si

$$x^\bullet \in \text{int}(\text{dom}(g^*)) \quad \text{et} \quad \partial g^*(y^\bullet) \subset V_{x^\bullet}, \quad (1.13)$$

alors  $y^\bullet$  est un minimum local de  $h^* - g^*$ .

**Preuve :** Immédiate d'après la proposition (1.1) en se restreignant à l'intervalle  $V_{x^\bullet} \cap \text{dom}(g)$ .  $\square$

**Remarque 1.4** Bien sûr, par dualité, tous les résultats de cette section se transposent au problème dual  $D$ . Par exemple :

si  $y$  est un minimum local de  $h^* - g^*$  alors  $\partial g^*(y) \subset \partial h^*(y)$ .

## 1.3 DCA

Il s'agit d'une nouvelle méthode de sous-gradient basée sur l'optimalité et la dualité en optimisation DC (non différentiable). Cette approche est complètement différente des méthodes classiques de sous-gradient en optimisation convexe. Dans les DCA, la construction algorithmique cherche à exploiter la structure DC du problème. Elle nécessite, en premier lieu, de disposer d'une représentation DC de la fonction à minimiser, i.e.  $f = g - h$  ( $g, h$  convexe), car toutes les opérations s'effectueront uniquement sur les composantes convexes. Ainsi, la séquence des directions de descente est obtenue en calculant une suite de sous-gradient non directement à partir de la fonction  $f$ , mais des composantes convexes des problèmes primal et dual.

### 1.3.1 Principe de DCA

La construction des DCA, découverte par Pham Dinh Tao (1986) s'appuie sur la caractérisation des solutions locales en optimisation DC des problèmes primal ( $P$ ) et dual ( $D$ )

$$\alpha = \inf\{g(x) - h(x) : x \in X\} \quad (P),$$

$$\alpha = \inf\{h^*(y) - g^*(y) : y \in Y\} \quad (D).$$

Les DCA reposent sur la construction de deux suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  qui sont améliorées à chaque itération de sorte que leur limite respective  $x^*$  et  $y^*$  soient candidates pour être les optima locaux du problème primal et du problème dual respectivement. Ces deux suites sont liées par dualité et vérifient les propriétés suivantes :

- les suites  $\{g(x^k) - h(x^k)\}$  et  $\{h^*(y^k) - g^*(y^k)\}$  sont décroissantes,
- et si  $(g - h)(x^{k+1}) = (g - h)(x^k)$  alors l'algorithme s'arrête à la  $(k + 1)^{ieme}$  itération et le point  $x^k$  (resp.  $y^k$ ) est un point critique de  $g - h$  (resp.  $h^* - g^*$ ),
- sinon toute valeur d'adhérence  $x^\bullet$  de  $\{x^k\}$  (resp.  $y^\bullet$  de  $\{y^k\}$ ) est un point critique de  $g - h$  (resp.  $h^* - g^*$ ).

L'algorithme cherche en définitif un couple  $(x^\bullet, y^\bullet) \in X \times Y$  tel que  $x^\bullet \in \partial g^*(y^\bullet)$  et  $y^\bullet \in \partial h(x^\bullet)$ .

#### Schéma de DCA simplifié

L'idée principale de la mise en oeuvre de l'algorithme (forme simple) est de construire une suite  $\{x^k\}$ , vérifiant à chaque itération  $\partial g(x^k) \cap \partial h(x^{k-1}) \neq \emptyset$ , convergente vers un point critique  $x^\bullet$  ( $\partial h(x^\bullet) \cap \partial g(x^\bullet) \neq \emptyset$ ) et symétriquement, de façon analogue par dualité, une suite  $\{y^k\}$  telle que  $\partial g^*(y^{k-1}) \cap \partial h^*(y^k) \neq \emptyset$  convergente vers un point critique.

On construit ainsi :

**Algorithme 1. [DCA]**

Étape 0.  $x^0$  donné.

Étape 1. Pour chaque  $k$ ,  $x^k$  étant connu, déterminer  $y^k \in \partial h(x^k)$ .

Étape 2. Trouver  $x^{k+1} \in \partial g^*(y^k)$ .

Étape 3. Si test d'arrêt vérifié **STOP** ; Sinon  $k \leftarrow k + 1$  et aller en Étape 1.

Cette description, avec l'aide de schémas d'itération de points fixes des multi-applications  $\partial h$  et  $\partial g^*$ , apparaît ainsi être d'une grande simplicité.

**1.3.2 Existence des suites générées**

L'algorithme DCA est bien défini si on peut effectivement construire les deux suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  comme ci-dessus à partir d'un point initial arbitraire  $x^0$ .

- Par construction, si  $x^0 \in \text{dom}(\partial h)$ , alors  $y^0 \in \partial h(x^0)$  est bien défini.
- Pour  $k \geq 1$ ,  $y^k$  est bien défini si et seulement si  $x^k$  est défini et contenu dans  $\text{dom}(\partial h)$ , par suite,  $x^k$  et  $y^k$  sont bien définis si et seulement si  $\partial g^*(y^{k+1}) \cap \text{dom}(\partial h)$  est non vide, ce qui entraîne que  $y^{k+1} \in \text{dom}(\partial g^*)$ .

**Lemme 1.1** ([83]) *Les suites  $\{x^k\}$ ,  $\{y^k\}$  dans DCA sont bien définies si et seulement si*

$$\text{dom}(\partial g) \subset \text{dom}(\partial h), \quad \text{et} \quad \text{dom}(\partial h^*) \subset \text{dom}(\partial g^*).$$

La convergence de l'algorithme est assurée par les résultats suivants ([83]) :

Soient  $\rho_i$  et  $\rho_i^*$ , ( $i = 1, 2$ ) des nombres réels positifs tels que  $0 \leq \rho_i < \rho(f_i)$  (resp.  $0 \leq \rho_i^* < \rho_i^*(f_i^*)$ ) où  $\rho_i = 0$  (resp  $\rho_i^* = 0$ ) si  $\rho(f_i) = 0$  (resp  $\rho(f_i^*) = 0$ ) et  $\rho_i$  (resp  $\rho_i^*$ ) peut prendre la valeur  $\rho(f_i)$  (resp  $\rho(f_i^*)$ ) si cette borne supérieure est atteinte. Nous poserons pour la suite  $f_1 = g, f_2 = h$ .

**Théorème 1.4** *Si les suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  sont bien définies. Alors on a :*

(i)

$$(g - h)(x^{k+1}) \leq (h^* - g^*)(y^k) - \frac{\rho_h}{2} \|dx^k\|^2 \leq (g - h)(x^k) - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \|dx^k\|^2$$

(ii)

$$(h^* - g^*)(y^{k+1}) \leq (g - h)(x^{k+1}) - \frac{\rho_1^*}{2} \|dy^k\|^2 \leq (h^* - g^*)(y^k) - \frac{\rho_1^* + \rho_2^*}{2} \|dy^k\|^2$$

où  $dx^k = x^{k+1} - x^k$ .



**Corollaire 1.5** ([83])(**Convergence**)

1.

$$\begin{aligned} (g - h)(x^{k+1}) &\leq (h^* - g^*)(y^k) - \frac{\rho_2}{2} \|dx^k\|^2 \\ &\leq (g - h)(x^k) - \left[ \frac{\rho_2}{2} \|dx^{k-1}\|^2 + \frac{\rho_1^*}{2} \|dy^k\|^2 \right] \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (g - h)(x^{k+1}) &\leq (h^* - g^*)(y^k) - \frac{\rho_2^*}{2} \|dx^k\|^2 \\ &\leq (g - h)(x^k) - \left[ \frac{\rho_2^*}{2} \|dx^{k-1}\|^2 + \frac{\rho_1^*}{2} \|dy^k\|^2 \right] \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (h^* - g^*)(y^{k+1}) &\leq (g - h)(x^{k+1}) - \frac{\rho_1^*}{2} \|dy^k\|^2 \\ &\leq (h^* - g^*)(y^k) - \left[ \frac{\rho_1^*}{2} \|dy^k\|^2 + \frac{\rho_2^*}{2} \|dx^k\|^2 \right] \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} (h^* - g^*)(y^{k+1}) &\leq (g - h)(x^{k+1}) - \frac{\rho_1}{2} \|dy^{k+1}\|^2 \\ &\leq (h^* - g^*)(y^k) - \left[ \frac{\rho_1}{2} \|dx^{k+1}\|^2 + \frac{\rho_2}{2} \|dx^k\|^2 \right] \end{aligned}$$

**Corollaire 1.6** ([83]) *Si les égalités ont lieu, il vient :*

1.  $(g - h)(x^{k+1}) = (h^* - g^*)(y^k) \iff y^k \in \partial h(x^{k+1})$
2.  $(g - h)(x^{k+1}) = (g - h)(x^k) \iff x^k \in \partial g^*(y^k), \quad y^k \in \partial h(x^{k+1})$
3.  $(h^* - g^*)(y^k) = (g - h)(x^k) \iff x^k \in \partial g^*(y^k)$
4.  $(h^* - g^*)(y^{k+1}) = (h^* - g^*)(y^k) \iff y^k \in \partial h(x^{k+1}), \quad x^{k+1} \in \partial g^*(y^{k+1})$ .

En général, les qualités (robustesse, stabilité, vitesse de convergence, bonnes solutions locales) de DCA dépendent des décompositions DC de la fonction objectif  $f = g - h$ . Le théorème 1.4 montre que la forte convexité des composantes convexes dans les problèmes primal et dual peut influencer sur DCA. Pour rendre les composantes convexe  $g$  et  $h$  fortement convexes, on peut usuellement appliquer l'opération suivante

$$f = g - h = \left( g + \frac{\lambda}{2} \|\cdot\|^2 \right) - \left( h + \frac{\lambda}{2} \|\cdot\|^2 \right).$$

Dans ce cas, les composantes convexes dans le problème dual seront continûment différentiable.

**1.3.3 Calcul des sous-gradients**

La description de DCA à l'aide de schémas d'itération de points fixes des multi-applications  $\partial h$  et  $\partial g^*$  ( $\partial g$  et  $\partial g^*$ ) se présente schématiquement :

$$\begin{array}{ccc} x^k & \leftarrow & y^k \in \partial h(x^k) \\ & \swarrow & \\ x^{k+1} \in \partial g^*(y^k) & \leftarrow & y^{k+1} \in \partial h(x^{k+1}) \\ (y^k \in \partial g(x^{k+1})) & & (x^{k+1} \in \partial h^*(y^{k+1})) \end{array} \quad (1.14)$$

On voit ainsi une parfaite symétrie des suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  relative à la dualité de l'optimisation DC.

Le calcul du sous-gradient de la fonction  $h$  en un point  $x^k$  est en général aisé : dans de nombreux problèmes concrets on connaît l'expression explicite de  $\partial h$ . Par contre, le calcul d'un sous gradient de la conjuguée de la fonction convexe  $g$  en un point  $y^k$ , nécessite en général la résolution du programme convexe,

$$\partial g^*(y^k) = \operatorname{argmin}\{g(x) - \langle y^k, x \rangle : x \in X\}, \quad (1.15)$$

en effet, rappelons que l'expression explicite de la conjuguée d'une fonction donnée n'est en pratique pas connue.

D'après (1.15), remarquons que le calcul de  $x^{k+1}$  revient à minimiser une fonction convexe déduite de la fonction DC  $f = g - h$ , en approximant la composante concave  $-h$  par une de ses minorantes affines au point  $x^k$ , i.e.

$$x^{k+1} \in \partial g^*(y^k) : \quad x^{k+1} \in \operatorname{argmin}\{g(x) - [\langle y^k, x - x^k \rangle + h(x^k)] : x \in X\}.$$

Et similairement, par dualité

$$y^{k+1} \in \partial h(x^{k+1}) : \quad y^{k+1} \in \operatorname{argmin}\{h^*(y) - [\langle x^{k+1}, y - y^k \rangle + g^*(y^k)] : y \in Y\}.$$

### 1.3.4 Optimisation DC polyédrale

L'optimisation DC polyédrale survient lorsque l'une des composantes convexes  $g$  ou  $h$  est convexe polyédrale. A l'instar des problèmes d'optimisation convexe polyédrale, cette classe de problème d'optimisation DC se rencontre fréquemment en pratique et possèdent d'intéressantes propriétés. Nous allons voir que la description de DCA y est particulièrement simple ([70, 71, 83]).

Soit le programme DC

$$\inf\{g(x) - h(x) : x \in X\} \quad (P),$$

lorsque la composante convexe  $h$  est polyédrale, i.e.

$$h(x) = \max_{x \in X} \{\langle a^i, x \rangle - b^i : i = 1, \dots, m\},$$

alors le calcul des sous-gradients  $y^k = \partial h(x^k)$  est immédiat. Il est clair qu'en limitant (naturellement) le choix des sous-gradients aux gradients des fonctions affines minorantes de  $h$ , i.e.  $\{y^k\} \in \{a^i : i = 1, \dots, m\}$ , qui est un ensemble fini, la suite des itérés  $\{y^k\}$  sera finie ( $k \leq m$ ). En effet, la suite  $\{(h^* - g^*)(y^k)\}$  est par construction de DCA décroissante et les choix possibles des itérés  $y^k$  sont finis. De même, par dualité les suites  $\{x^k\}$  et  $\{(g - h)(x^k)\}$  sont décroissantes.

#### **Théorème 1.5 (Convergence finie)**

- les suites  $\{g(x^k) - h(x^k)\}$  et  $\{h^*(y^k) - g^*(y^k)\}$  sont décroissantes,
- lorsque  $(g - h)(x^{k+1}) = (g - h)(x^k)$  alors l'algorithme s'arrête à la  $(k + 1)^{ieme}$  itération et le point  $x^k$  (resp.  $y^k$ ) est un point critique de  $g - h$  (resp.  $h^* - g^*$ ).

Remarquons que si c'est la composante  $g$  qui est polyédrale, de par la conservation du caractère polyédrale par la conjugaison fonctionnelle et de l'écriture du problème dual, on retrouve les mêmes résultats ci-dessus.

### 1.3.5 Interprétations de DCA

A chaque itération on remplace dans le programme DC primal la deuxième composante DC  $h$  par sa minorante affine  $h_k(x) := h(x^k) + \langle x - x^k, y^k \rangle$  au voisinage de  $x^k$  pour obtenir le programme convexe suivant

$$\inf\{\bar{f}_k := g(x) - h_k(x) : x \in \mathbb{R}^n\} \quad (1.16)$$

dont l'ensemble des solutions optimales n'est autre que  $\partial g^*(y^k)$ .

De manière analogue, la deuxième composante DC  $g^*$  du programme DC dual (1.5) est remplacée par sa minorante affine  $(g^*)_k(y) := g^*(y^k) + \langle y - y^k, x^{k+1} \rangle$  au voisinage de  $y^k$  pour donner naissance au programme convexe

$$\inf\{h^*(y) - (g^*)_k(y) : y \in \mathbb{R}^n\} \quad (1.17)$$

dont  $\partial h(x^{k+1})$  est l'ensemble des solutions optimales. DCA opère ainsi une double linéarisation à l'aide des sous-gradients de  $h$  et  $g^*$ . Il est à noter que DCA travaille avec les composantes DC  $g$  et  $h$  et non pas avec la fonction  $f$  elle-même. Chaque décomposition DC de  $f$  donne naissance à un DCA.

Comme  $\bar{f}_k$  est une fonction convexe, le minimum  $x^{k+1}$  est défini par  $0 \in \partial \bar{f}_k(x^{k+1})$  et la majoration de  $f$  par  $\bar{f}_k$  assure la décroissance de la suite  $\{f(x^k)\}$ . En effet, comme  $h_k$  est une fonction affine minorante de  $h$  en  $x^k$ ,  $\bar{f}_k$  est bien une fonction convexe majorante de  $f$ ,

$$f(x) \leq \bar{f}_k(x), \quad \forall x \in X,$$

qui coïncide en  $x^k$  avec  $f$ ,

$$f(x^k) = \bar{f}_k(x^k),$$

donc en déterminant l'itéré  $x^{k+1}$  comme le minimum du programme convexe (1.16), la décroissance de la suite des itérés est assurée,

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k).$$

Si à l'itération  $k+1$ ,  $f(x^{k+1}) = f(x^k)$  alors  $x^{k+1}$  est un point critique de  $f$  ( $0 \in \partial \bar{f}_k(x^{k+1}) \implies 0 \in \partial f(x^{k+1})$ ).

**Remarque 1.5** Si  $\overline{f}_k$  est strictement convexe alors il existe un unique minimum  $x^{k+1}$ .

**Commentaire :** il est important de remarquer que l'on remplace, non localement au voisinage de  $x^k$ , mais globalement sur tout le domaine, la fonction  $f$  par la fonction :

$$\overline{f}_k(x) = g(x) - (\langle y^k, x - x^k \rangle + h(x^k)) \quad \text{avec } y^k \in \partial h(x^k), \forall x \in X$$

qui, considérée localement au voisinage de  $x^k$ , est une approximation du premier ordre de  $f$  et globalement sur  $\mathbb{R}^n$ . Il faut souligner que  $\overline{f}_k$  n'est pas définie restrictivement à partir d'information locale de  $f$  au voisinage de  $x^k$  (i.e.  $f(x^k), \partial f(x^k), \dots$ ) mais incorpore toute la première composante convexe de  $f$  dans sa définition, i.e.  $\overline{f}_k = g - h_k = f - (h + h_k)$ . En d'autre terme,  $\overline{f}_k$  n'est pas simplement une approximation locale de  $f$  au voisinage de  $x^k$ , mais doit être plutôt qualifiée de "convexification majorante" de  $f$  globalement liée à la fonction DC par la première composante convexe définie sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier. Par conséquent, les pas de déplacement de  $x^k$  à  $x^{k+1}$  sont déterminés à partir de  $f$  définie globalement pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . DCA ne peut donc être simplement considéré, comme une méthode d'approximation locale ou de descente locale, telle que l'on connaît classiquement, de par le caractère globale de la "convexification majorante". Ainsi, à la différence des approches locales conventionnelles (déterministes ou heuristiques), DCA exploite simultanément des propriétés locales et globales de la fonction à minimiser au cours du processus itératif et converge en pratique vers une bonne solution locale, voire parfois globale.

Pour une étude complète de la programmation DC et DCA, se reporter aux [70]-[104] et [135]-[140] et références incluses. Le traitement d'un programme non convexe par une approche DC et DCA devrait comporter donc deux tâches : la recherche d'une décomposition DC adéquate et celle d'un bon point initial. Pour un programme DC donné, la question de décomposition DC optimale reste ouverte, en pratique on cherche des décompositions DC bien adaptées à la structure spécifiques du programme DC étudié pour lesquelles les suites  $\{x^k\}$  et  $\{y^k\}$  sont faciles à calculer, si possible explicites pour que les DCA correspondants soient moins coûteux en temps et par conséquent capables de supporter de très grandes dimensions.

# Chapitre 2

## L'algorithme par Séparation et Evaluation (SE)

---

*Résumé* Ce chapitre concerne l'algorithme de Séparation et Evaluation (SE). La séparation et évaluation est un algorithme exhaustif qui converge vers la solution globale sous certaines conditions. Ce chapitre est consacré aux éléments de base de cet algorithme ainsi que les conditions de convergence. De plus, deux cas particuliers de cet algorithme sont présentés.

---

### 2.1 Introduction

Un algorithme par séparation et évaluation (SE) est une méthode générique de résolution de problèmes d'optimisation, et plus particulièrement d'optimisation combinatoire ou discrète non convexes. Dans les méthodes par séparation et évaluation, la *séparation* permet d'obtenir une méthode générique pour localiser toutes les solutions optimales tandis que l'*évaluation* évite l'énumération systématique de toutes les solutions.

#### Séparation

La phase de séparation consiste à diviser le problème en un certain nombre de sous-problèmes qui ont chacun leur ensemble de solutions réalisables de telle sorte que tous ces ensembles forment une partition de l'ensemble de toutes les solutions possibles. Ainsi, en résolvant tous les sous-problèmes et en prenant la meilleure solution trouvée, on est assuré d'avoir résolu le problème initial. Ce principe de séparation peut être appliqué de manière récursive à chacun des sous-ensembles de solutions obtenus, et ceci tant qu'il y a des ensembles contenant plusieurs solutions. Les ensembles de solutions (et leurs sous-problèmes associés) construits ont une hiérarchie naturelle en arbre, souvent appelée *arbre de recherche* ou *arbre de décision*.

## Evaluation

L'évaluation d'un nœud de l'arbre de recherche a pour but de déterminer l'optimum de l'ensemble des solutions réalisables associé au nœud en question ou, au contraire, de prouver mathématiquement que cet ensemble ne contient pas de solution intéressante pour la résolution du problème (typiquement, qu'il n'y a pas de solution optimale). Lorsqu'un tel nœud est identifié dans l'arbre de recherche, il est donc inutile d'effectuer la séparation de son espace de solutions. Pour déterminer qu'un ensemble de solutions réalisables ne contient pas de solution optimale, la méthode la plus générale consiste à déterminer une borne inférieure pour tous les problèmes contenus dans l'ensemble (s'il s'agit d'un problème de minimisation). Si on arrive à trouver une borne inférieure associée à un sous-problème supérieur à la meilleure solution trouvée jusqu'à présent, on a alors l'assurance que le sous-ensemble ne contient pas l'optimum. Les techniques les plus classiques pour le calcul de bornes sont basées sur l'idée de relaxation de certaines contraintes : relaxation continue, relaxation lagrangienne, etc.

L'algorithme par Séparation et Evaluation est peut-être la technique la plus populaire en optimisation globale. SE est plus connu sous son nom anglais *Branch and Bound (B&B) algorithm*. L'avantage principale de cette approche est dû à sa capacité de résoudre une grande variété des problèmes non convexes. Théoriquement, pour chaque problème d'optimisation, quelque soit le problème, on peut construire un algorithme de type SE pour le résoudre [39]. D'après Murty [120], l'approche SE a été développée indépendamment par Land et Doig en 1960 [66] et aussi par Murty, Karel et Little en 1962 [119]. Mais d'après Gupta [39] les premières applications de SE datent à 1958 ([26], [39]) pourtant le mot Branch and Bound a été premièrement utilisé par Little et al. en 1963 [109]. En tout cas, Land et Doig [66] ont utilisé leur méthode pour résoudre un problème mixte pour lequel certaines variables sont entières. Murty et al. [119] avaient développé un algorithme pour un cas particulier d'optimisation en variables discrètes.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter le schéma général de SE et le théorème de convergence. Ensuite, nous allons présenter deux cas particuliers de l'approche SE.

## 2.2 Le cas général de SE

On considère le problème de minimisation d'une fonction continue sur un ensemble compact

$$\min \{f(x) : x \in S \subset \mathbb{R}^n\}. \quad (2.1)$$

Il est bien connu que si  $S \neq \emptyset$  alors le problème admet une solution. On veut trouver une solution dite optimale globale  $x^* \in S$  telle que

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in S.$$

L'idée de base de la méthode SE consiste en une division successive d'un ensemble qui contient  $S$  en sous-ensembles de plus en plus petits. A chaque sous-ensemble contenant une

partie de  $S$ , on associe une borne inférieure de la valeur de fonction objectif sur cet ensemble afin d'éliminer les parties non prometteuses et de sélectionner un ensemble que l'on devrait diviser par la suite.

**Définition 2.2.1** Soit  $M$  un compact dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $I$  un ensemble fini des indices. Un ensemble  $M_i : i \in I$  de sous-ensemble compacts est dit une "partition" de  $M$  si

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i, \quad M_i \cap M_j = \partial M_i \cap \partial M_j, \quad \forall i, j \in I : i \neq j$$

où  $\partial M_i$  dénote la frontière relative à  $M$  de  $M_i$ . □

### 2.2.1 Méthode de résolution et convergence

Adoptons la notation  $\min f(S) = \min\{f(x) : x \in S\}$ . Le schéma général de SE se résume de la manière suivante :

---

#### Prototype SE

---

##### Initialisation :

1. Choisir un compact  $S \subset M_0$ , un ensemble fini des indices  $I_0$ , une partition  $\mathcal{M}_0 = \{M_{0,i} : i \in I_0\}$  de  $M_0$  satisfaisant  $M_{0,i} \cap S \neq \emptyset, i \in I_0$ .
2. Pour chaque  $i \in I_0$  déterminer

$$S_{0,i} \subset M_{0,i} \cap S, S_{0,i} \neq \emptyset$$

et

$$\gamma_{0,i} = \gamma(M_{0,i}) := \min f(S_{0,i}), \quad x^{0,i} \in \operatorname{argmin} f(S_{0,i}).$$

3. Pour chaque  $i \in I_0$  déterminer

$$\beta_{0,i} = \beta(M_{0,i}) \leq \min f(S \cap M_{0,i}).$$

4. Calculer

$$\gamma_0 = \min_{i \in I_0} \gamma_{0,i}, \tag{2.2}$$

$$x^0 \in \operatorname{argmin} \{f(x^{0,i}), i \in I_0\}, \tag{2.3}$$

$$\beta_0 = \min_{i \in I_0} \beta_{0,i}. \tag{2.4}$$

##### Itération $k$ :

**k.1** Supprimer tout  $M_{k,i} \in \mathcal{M}_k$  vérifiant

$$\beta_{k,i} \geq \gamma_0$$

ou pour lequel on sait que  $\min f(S)$  ne peut pas avoir lieu dans  $M_{k,i}$ . Soit  $\mathcal{R}_k$  la collection des éléments restant  $M_{k,i} \in \mathcal{M}_k$ .

Si  $\mathcal{R}_k = \emptyset$  alors s'arrêter,  $x^k$  est une solution.

**k.2** Sélectionner  $M_{k,i_k} \in \mathcal{R}_k$ , choisir un ensemble fini des indices  $J_{k+1}$  et construire une partition

$$\mathcal{M}_{k,i_k} = \{M_{k+1,i} : i \in J_{k+1}\}$$

de  $M_{k,i_k}$  telle que  $M_{k+1,i} \cap S \neq \emptyset$ .

**k.3** Pour chaque  $i \in J_{k+1}$  déterminer

$$S_{k+1,i} \subset M_{k+1,i} \cap S, S_{k+1,i} \neq \emptyset$$

et

$$\gamma_{k+1,i} = \gamma(M_{k+1,i}) := \min f(S_{k+1,i}), x^{k+1,i} \in \operatorname{argmin} f(S_{k+1,i}).$$

**k.4** Pour chaque  $i \in J_{k+1}$  déterminer  $\beta_{k+1,i}$  tel que

$$\beta_{k,i_k} \leq \beta_{k+1,i} \leq \min f(S \cap M_{k+1,i}).$$

**k.5** Poser

$$\mathcal{M}_{k+1} = (\mathcal{R}_k \setminus M_{k,i_k}) \cup M_{k,i_k}.$$

Soit  $I_{k+1}$  l'ensemble des indices tels que

$$\mathcal{M}_{k+1} = \{M_{k+1,i} : I \in I_{k+1}\}$$

est la partition actuelle.

**k.6** Calculer

$$\gamma_{k+1} = \min_{i \in I_{k+1}} \gamma_{k+1,i}, \quad (2.5)$$

$$x^{k+1} \in \operatorname{argmin} \{f(x^{k+1,i}), i \in I_{k+1}\}, \quad (2.6)$$

$$\beta_{k+1} = \min_{i \in I_{k+1}} \beta_{k+1,i}. \quad (2.7)$$

et retourner à l'itération  $k + 1$ .

**Remarque 2.1** (i) Il faudrait déterminer  $S_{k,i}, x^{k,i}, \beta_{k,i}$  de telle façon que ces bornes autant serrées que possible, avec un effort de calcul raisonnable. On parvient donc à un certain compromis.

(ii)  $\gamma_{k,i}, \beta_{k,i}$  sont des bornes supérieures et des bornes inférieures pour  $\min f(S \cap M_{k,i})$  associées à chaque ensemble  $M_{k,i}$  et  $\gamma_k, \beta_k$  sont des bornes supérieures et des bornes inférieures à  $\min f(S)$  étant décroissantes et croissantes respectivement.



(iii)  $\beta_{k,i} \geq \gamma_k$  indique que la solution  $x^k$  ne peut pas s'améliorer dans  $M_{k,i}$  donc cet élément peut être éliminé.

### Condition de la convergence

La méthode SE converge dans le sens que chaque point d'accumulation de  $\{x^k\}$  est une solution de (P). Évidemment, par la construction, on a

$$x^k \in S, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.8)$$

$$\gamma_k \geq \gamma_{k+1} \geq \min f(S) \geq \beta_{k+1} \geq \beta_k, \quad (2.9)$$

$$f(x^k) \geq f(x^{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

**Définition 2.2.2** Une estimation de borne est dite cohérente si, pour une suite décroissante quelconque  $M_{k_q, i_{k_q}}$  générée par la procédure de séparation, i.e.

$$M_{k_{q+1}, i_{k_{q+1}}} \subset M_{k_q, i_{k_q}}, \quad (2.11)$$

on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (\gamma_{k_q, i_{k_q}} - \beta_{k_q, i_{k_q}}) = 0. \quad (2.12)$$

□

Puisque  $\beta_{k_q, i_{k_q}} \leq \gamma_{k_q} \leq \gamma_{k_q, i_{k_q}}$ , la condition (2.12) peut s'écrire

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (\alpha_{k_q} - \beta_{k_q, i_{k_q}}) = 0. \quad (2.13)$$

Par la monotonie et la bornitude des suites  $\{\gamma_k\}, \{\beta_k\}$  on a

$$(f(x^k) = \gamma_k) \longrightarrow \alpha, \quad \beta_k \longrightarrow \beta, \quad \gamma \geq \min f(S) \geq \beta.$$

**Définition 2.2.3** Une sélection est dite complète si pour chaque

$$M \in \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{k=p}^{\infty} \mathcal{R}_k$$

on a

$$\inf f(M \cap S) \geq \alpha.$$

Une sélection est dite "borne améliorante", si au moins après chaque nombre fini d'itérations, on a

$$M_{k, i_k} \in \operatorname{argmin}\{\beta(M) : M \in \mathcal{R}_k\}. \quad (2.14)$$

□

**Théorème 2.1** *Supposons que  $S$  est fermé et que  $\min f(S)$  existe. Soit, dans le prototype, l'opération d'estimation de borne est cohérente. On a :*

– (i) *Si la sélection est complète, alors*

$$\gamma := \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = \min f(S). \quad (2.15)$$

– (ii) *Si la sélection est borne améliorante, alors*

$$\beta := \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \min f(S). \quad (2.16)$$

– (iii) *Si la sélection est complète,  $f$  est continue, et  $\{x \in S : f(x) \leq f(x^0)\}$  est borné, alors chaque point d'accumulation de  $\{x^k\}$  résout le problème (P).*

**Preuve :**

– (i) Puisque  $\gamma \geq \inf f(S)$ , il suffit de montrer que  $f(x) \geq \beta$ ,  $\forall x \in S$ .

Si  $x$  appartient à un ensemble qui est éliminé dans l'itération  $k$  où à un ensemble

$$M \in \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcap_{k=p}^{\infty} \mathcal{R}_k$$

(i.e.  $M$  reste inchangé) alors, on a

$$f(x) \geq \beta_{k,i} > \gamma_k \geq \gamma$$

ou

$$\inf f(M \cap S) \geq \alpha$$

car la sélection est complète. Donc  $f(x) \geq \gamma$ . Sinon, il existe une suite décroissante  $\{M_{k_q, i_{k_q}}\}$  telle que  $x \in M_{k_q, i_{k_q}}, \forall q$ . Du fait que  $f(x) \geq \beta_{k_q, i_{k_q}}, \forall q$  et l'ensemble de borne est cohérente on a  $\lim \gamma_{k_q} = \alpha = \lim \beta_{k_q, i_{k_q}}$ , ce qui implique  $f(x) \geq \gamma$ .

– (ii) Il s'ensuit de (2.14) que  $\{M_{k, i_k}\}$  doit contenir une sous-suite décroissante  $\{M_{k_q, i_{k_q}}\}$  avec  $\beta_{k_q} = \beta_{k_q, i_{k_q}}$ . Puisque l'estimation de borne est cohérente, on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (\gamma_{k_q} - \beta_{k_q, i_{k_q}}) = \lim_{q \rightarrow \infty} (\gamma_{k_q} - \beta_{k_q}) = 0.$$

– (iii) L'ensemble

$$S(x^0) := \{x \in S : f(x) \leq f(x^0)\}$$

est borné et, puisque  $S$  est fermé et  $f$  est continue,  $S(x^0)$  est fermé. Comme on a déjà vu,  $f(x^k) \leq f(x^0)$ , on a  $\{x^k\} \subset S(x^0)$ . Donc  $x^k$  possède des points d'accumulation et (iii) est une conséquence de (i). □

Noter que si l'estimation de borne est cohérente alors la sélection qui améliore des bornes est aussi complète, parce que  $f(x) \leq \beta_{k_q}, \forall x \in S$  et lorsque (2.14) est appliqué, on a

$$\inf f(M \cap S) \geq \beta = \gamma$$

pour tout ensemble  $M$ .

Dans le prototype SE, il est nécessaire que  $M \cap S \neq \emptyset$  pour chaque élément  $M$  de la partition. Or, dans des cas concrets il n'y a pas de règles concrètes pour décider de façon définitive si  $M \cap S$  est vide ou non. En effet, pour définir un ensemble  $M$ , souvent un polyèdre, il suffit de connaître l'ensemble  $V(M)$  de sommets de  $M$ . Mais évidemment, cela ne suffit pas pour donner une décision concrète sur  $M \cap S \neq \emptyset$  ou  $M \cap S = \emptyset$ , même dans un cas très simple. Cette déficience, en effet limite l'applicabilité de la méthode. Dans ce qui suit, on va utiliser des règles qui ne garantissent pas que les ensembles vérifiant  $M \cap S = \emptyset$  seront supprimés mais seulement une partie suffisante d'eux, tout en assurant la convergence de l'algorithme.

## 2.2.2 Séparation et Evaluation avec des ensembles non réalisables

**Définition 2.2.4** *Un ensemble  $M$  tel que  $M \cap S = \emptyset$  est appelé "non réalisable". Un ensemble  $M$  tel que  $M \cap S \neq \emptyset$  est appelé "réalisable". Un ensemble  $M$  est dit "incertain" quand nous ne savons pas si  $M$  est réalisable ou non.  $\square$*

Bien sûr, un ensemble sera éliminé si on sait qu'il est non réalisable. Lorsque les ensembles incertains sont admis, on va demander pour que

- $-\infty < \beta(M) \leq \min f(M \cap S)$  ,si  $M$  est réalisable,
- $-\infty < \beta(M) \leq \min f(M)$  ,si  $M$  est incertain.

En général,  $S_M \subset M \cap S$  peut être vide et il est possible que la borne  $\alpha(M) = \infty$ . La variante suivante du prototype ci-dessus sera appliqué lorsqu'on ne peut pas décider définitivement si  $M \cap S$  a lieu pour tous les ensembles de la partitions données. Noter que dans ce cas, les bornes supérieures ne sont pas toujours disponibles. Pour la clarté, on va décrire cette variante en détail. Adoptons, par convention, que le minimum sur un ensemble vide prend la valeur infinie.

---

### Prototype 2

---

#### Initialisation :

1. Choisir  $S \subset M_0$  un compact, un ensemble fini des indices  $I_0$ , une partition  $\mathcal{M}_0 = \{M_{0,i} : i \in I_0\}$  de  $M_0$ .
2. Pour chaque  $i \in I_0$  déterminer

$$S_{0,i} \subset M_{0,i} \cap S, S_{0,i} \neq \emptyset$$

et

$$\alpha_{0,i} = \alpha(M_{0,i}) := \min f(S_{0,i}), \quad x^{0,i} \in \operatorname{argmin} f(S_{0,i}).$$

Si  $S_{0,i}$  n'est pas disponible (par des efforts raisonnables), on pose  $S_{0,i} = \emptyset$ .

3. Pour chaque  $i \in I_0$  déterminer  $\beta_{0,i} = \beta(M_{0,i})$  vérifiant

- $-\infty < \beta(M_{0,i}) \leq \min f(M_{0,i} \cap S)$  ,si  $M_{0,i}$  est réalisable,
- $-\infty < \beta(M_{0,i}) \leq \min f(M_{0,i})$  ,si  $M_{0,i}$  est incertain.

4. Calculer

$$\alpha_0 = \min_{i \in I_0} \alpha_{0,i}, \quad (2.17)$$

$$x^0 \in \operatorname{argmin} \{f(x^{0,i}), i \in I_0\}, \quad (2.18)$$

$$\beta_0 = \min_{i \in I_0} \beta_{0,i}. \quad (2.19)$$

**Itération  $k$  :**

**k.1** Supprimer tout  $M_{k,i} \in \mathcal{M}_k$  vérifiant

$$\beta_{k,i} \geq \alpha_k$$

ou pour lequel on sait que  $\min f(S)$  ne peut pas atteindre  $M_{k,i}$ . Soit  $\mathcal{R}_k$  la collection des éléments restant  $M_{k,i} \in \mathcal{M}_k$ .

Si  $\mathcal{R}_k = \emptyset$  alors s'arrêter,  $x^k$  est une solution.

**k.2** Sélectionner  $M_{k,i_k} \in \mathcal{R}_k$ ; choisir un ensemble fini des indices  $J_{k+1}$  et construire une partition

$$\mathcal{M}_{k,i_k} = \{M_{k+1,i} : i \in J_{k+1}\}$$

de  $M_{k,i_k}$ . Appliquer des règles pour éliminer les sous-ensembles qu'on sait ils sont non réalisables.

**k.3** Pour chaque  $i \in J_{k+1}$  déterminer

$$S_{k+1,i} \in M_{k+1,i} \cap S, S_{k+1,i} \neq \emptyset$$

et

$$\alpha_{k+1,i} = \alpha(M_{k+1,i}) := \min f(S_{k+1,i}), x^{k+1,i} \in \operatorname{argmin} f(S_{k+1,i}).$$

Si  $S_{k+1,i}$  n'est pas disponible, on pose  $S_{k+1,i} = \emptyset$

**k.4** Pour chaque  $i \in J_{k+1}$  déterminer  $\beta_{k+1,i}$  tel que

$$\beta_{k,i_k} \leq \beta_{k+1,i} \leq \min f(S \cap M_{k+1,i}).$$

**k.5** Poser

$$\mathcal{M}_{k+1} = (\mathcal{R}_k \setminus M_{k,i_k}) \cup M_{k,i_k}. \quad (2.20)$$

Soit  $I_{k+1}$  l'ensemble des indices tel que

$$\mathcal{M}_{k+1} = \{M_{k+1,i} : I \in I_{k+1}\}$$

est la partition actuelle. Soient  $\alpha_{k+1,i}, \beta_{k+1,i}, x^{k+1,i}$  dénotent les quantités correspondant à  $M_{k+1,i} : I \in I_{k+1}$ .

**k.6** Calculer

$$\alpha_{k+1} = \min_{i \in I_{k+1}} \alpha_{k+1,i}, \quad (2.21)$$

$$\beta_{k+1} = \min_{i \in I_{k+1}} \beta_{k+1,i}. \quad (2.22)$$

Si  $\alpha_{k+1} < \infty$  alors, on prend  $x^{k+1} \in S$  tel que  $f(x^{k+1}) = \alpha_{k+1}$ . Retourner à l'itération  $k + 1$ .

**Définition 2.2.5** Soit  $\{M_{k_q}\}$  une suite décroissante d'ensembles générés par la procédure de division. Une procédure de division est dite "exhaustive" si pour chaque suite décroissante  $\{M_{k_q}\}$  des ensembles générés par cette procédure, la suite de diamètres  $d(M_{k_q})$  associés à  $M_{k_q}$  vérifie

$$\lim_{q \rightarrow \infty} d(M_{k_q}) = 0. \quad (2.23)$$

□

Évidemment, pour une suite décroissante des ensembles générés par une division exhaustive, on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} M_{k_q} = \bigcap_q M_{k_q} = \{\bar{x}\}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.24)$$

**Définition 2.2.6** L'opération d'estimation de borne inférieure est appelée "fortement cohérente" si pour n'importe quelle suite décroissante  $\{M_{k_q}\}$  d'ensembles générée par une division exhaustive telle que

$$M_{k_q} \longrightarrow \{\bar{x}\}, \quad q \longrightarrow \infty$$

il existe une sous-suite  $\{M_{k'_q}\}$  de  $\{M_{k_q}\}$  pour laquelle

$$\beta(M_{k'_q}) \longrightarrow f(\bar{x}), \quad q \longrightarrow \infty. \quad (2.25)$$

□

**Définition 2.2.7** L'élimination-par-non réalisabilité est appelée "certaine à la limite" si pour n'importe quelle suite décroissante  $\{M_{k_q}\}$  d'ensembles générées par une division exhaustive telle que  $M_{k_q} \longrightarrow \{\bar{x}\}$  on a

$$\bar{x} \in S. \quad (2.26)$$

□

On désigne  $Y^\alpha$  l'ensemble des points d'accumulation de la suite  $y^k$  de point correspondant à  $\beta_k$ . Soit  $X^* = \operatorname{argmin} f(S)$  l'ensemble de solution optimales de  $(P)$ . On a le théorème suivant.

**Théorème 2.2** *Supposons que le prototype 2 vérifie les conditions suivantes :*

- (i) *La division est exhaustive ;*
- (ii) *La sélection est borne-améliorante ;*
- (iii) *La borne inférieure est fortement cohérente ;*
- (iv) *L'élimination est certaine à la limite.*

Alors, on a

$$\beta := \lim \beta_k = \min f(S) \quad (2.27)$$

et

$$Y^\alpha \subset X^*. \quad (2.28)$$

**Preuve :** Supposons que la procédure ne se termine pas après un nombre fini d'itérations. On considère la suite de borne inférieure  $\beta_k$ . Soit, pour chaque  $k$ ,  $y^k$  le point correspondant à  $\beta_k$  qui est généré par la procédure. Soit  $M_k \in \operatorname{argmin}\{\beta(M) : M \in \mathcal{R}_k\}$  un élément dans  $\{\mathcal{R}_k\}$  tel que

$$y^k \in M_k, \quad \beta_k = \beta(M_k).$$

Par construction,  $\beta_k$  est une suite non décroissante et bornée supérieurement par  $\min(S)$ , donc on a l'existence de

$$\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k \leq \min(S).$$

Soient  $\bar{y} \in Y^\alpha$  et  $\{y^r\}$  une sous-suite de  $\{y^k\}$  telle que  $y^r \rightarrow \bar{y}$ . Alors en vertu de (i) et (ii) on peut conclure qu'il existe une suite décroissante  $\{M_q \subset M_r\}$  des éléments de division telle que

$$y^q \in M_q, \quad \beta_q = \beta(M_q)$$

et  $M_q \rightarrow \{\bar{y}\}$ . Il découle de (iii) l'existence d'une sous-suite  $\{M_{q'}\}$  de  $M_q$  telle que  $\beta(M_{q'}) \rightarrow f(\bar{y})$ . En vertu de (iv) on a  $\bar{y} \in S$ . On voit donc

$$\beta = \lim \beta(M_{q'}) = f(\bar{y}) \leq \min f(S)$$

et par conséquent on a

$$\beta = f(\bar{y}) = \min f(S),$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

### 2.2.3 Réalisation

Bien entendu, la réalisation d'un algorithme SE dépend du choix des opérations suivantes :

- Diviser  $M_{k,i_k}$ ,
- Sélectionner  $M_{k,i_k}$ ,
- Estimer les bornes inférieures  $\beta_{k,i}$ .

On va aborder par la suite ces opérations.

### 2.2.3.1 Stratégie de division

Par idée, les éléments de partition  $M_k$  doivent être très simple pour qu'on puisse les manipuler facilement. Naturellement, on utilise les plus simples polyèdres comme des simplexes, des rectangles et des cônes (polyédraux). Il faut également diviser ces polyèdres de telle manière que la procédure de division soit exhaustive, ce qui est nécessaire pour assurer la convergence de la méthode SE (cf. Théorème 2.2).

#### (a) Subdivision simpliciale

$M_0$  et tout élément de subdivision sont de  $n$ -simplexes. Ce n'est pas difficile de construire le premier simplexe  $M_0$  contenant  $S$ . Soit  $M = \text{conv}\{v^0, v^1, \dots, v^n\}$  un simplexe avec des sommets  $v^0, v^1, \dots, v^n$ . Alors, un point quelconque  $s \in M$  peut être représenté par

$$s = \sum_{i=0}^n \lambda_i v^i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1.$$

Soit  $s \neq x^i, i = 0, 1, \dots, n$ . Posons  $J = \{j : \lambda_j > 0\}$ . En remplaçant un sommet  $x^j$  tel que  $\lambda_j > 0$  par  $s$  on obtient un simplexe

$$M_j = \text{conv}\{v^0, v^1, \dots, v^{j-1}, s, v^{j+1}, \dots, v^n\}$$

et ainsi on peut construire une subdivision, appelée *radiale*, de  $M$ . Très souvent, on choisit  $s$  comme le milieu de la plus longue arête de  $M$  et  $M$  est divisé ainsi en deux simplexes. Dans ce cas, on a une bisection de  $M$ . Il est démontré que la bisection est exhaustive. Pourtant, on constate que les procédures exhaustives de division (en particulier bisection) ne sont pas très efficaces ; la convergence de la méthode est assez lente. On suggère alors d'utiliser comme  $s$  un point  $\omega$  obtenu dans la procédure d'estimation de borne (par exemple  $\omega$  est le point correspondant à  $\beta(M)$ ). On va appeler cette procédure  $\omega$ -subdivision. Le problème c'est qu'on ne peut plus assurer que la procédure de division soit exhaustive. Récemment, certaines stratégies plus flexibles sont étudiées. L'idée est d'utiliser le plus souvent possible la  $\omega$ -subdivision et de faire intervenir la bisection pour empêcher la dégradation. Une stratégie heuristique mais pratique, a été proposée dans [45]. Considérons un simplexe  $M$  et un point  $\omega \in M$ , qui s'écrit comme  $\omega = \sum_{i=0}^n \lambda_i v^i$ . Étant fixé un nombre  $\delta > 0$ .

Si  $\min\{\lambda_i : \lambda_i > 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}\} > \delta$  alors appliquer  $\omega$ -subdivision. Sinon utiliser bisection.

Les expériences ont indiqué que  $\delta = \frac{1}{2}n^2$  est un choix convenable.

#### (b) Subdivision rectangulaire

$M_0$  et toute partie de subdivision sont des  $n$ -rectangles dans  $\mathbb{R}^n$ . Le rectangle

$$M_0 = \prod_{i=1}^n [l_i, L_i]$$

le plus serré qui contient  $S$  (convexe) peut être déterminé en résolvant  $2n$  problèmes convexes

$$l_i = \min\{x_i : x \in S\}, \quad L_i = \max\{x_i : x \in S\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Les processus de subdivision rectangulaire jouent un rôle important dans des méthodes de Séparation et Evaluation. L'approche de Phillips et Rosen [141] (voir également Kalantari et Rosen [53]) emploie la subdivision exhaustive, i.e. toutes les suites décroissantes des rectangles générées par l'algorithme tendra à un point. Une bisection rectangulaire adaptative prétendue proposée dans Muu, L.D. [121] semble être plus efficace parce que l'exhaustion n'est pas nécessaire pour la convergence. Dans Horst et Tuy [49], un concept de la subdivision rectangulaire normale (NRS) a été présenté pour la classe des problèmes concaves séparables de minimisation qui inclut l'approche de Kalantari-Rosen et une subdivision proposée plus tôt dans Falk et Soland [28]. Intuitivement, la variante des algorithmes rectangulaires en utilisant  $\omega$ -subdivision et subdivision adaptative devrait converger plus rapidement que ceux qui emploient la subdivision exhaustive, parce qu'ils tiennent compte des conditions du sous-problème relaxé courant.

### (c) Subdivision conique

Supposons que  $S$  possède un point intérieure  $\omega$ . Soit  $M_0$  un  $n$ -simplexe tel que  $S \subseteq M_0$ ,  $M_0$  a  $n + 1$  faces  $F_{0,i}, i = 1, 2, \dots, n + 1$  de dimension  $n - 1$  qui sont des  $(n - 1)$ -simplexes. Les cônes polyédraux (appelés cônes)  $C_{0,i}$  centrés au  $\omega$  et engendrés par  $F_{0,i}$  constituent une division de  $\mathbb{R}^n$ . Ensuite, un cône  $C$  est défini par un  $(n - 1)$ -simplexe  $F$  dans  $F_{0,i}$ . Evidemment, une division de  $F$  en simplexes  $\{F_j : j \in J\}$  va provoquer une division de cône  $C$  en cônes  $\{C_j : j \in J\}$  correspondant aux  $F_j$ . En particulier, la bisection de cônes est induite par la bisection de simplexes. Si la procédure de division de simplexe est exhaustive alors la procédure de division de cônes sera aussi exhaustive dans le sens que chaque suite décroissante de cône  $\{C_k\}$  (générée par cette procédure) va tendre vers un rayon sortant de  $\omega$ . Les cônes sont très utiles quand une solution globale se trouve sur la frontière d'un convexe. En effet le premier algorithme conique a été proposé par Tuy [165] pour la minimisation d'une fonction concave sur un polyèdre.

### 2.2.3.2 Règles de sélection

Naturellement, on peut choisir à chaque itération

$$M_{k,i_k} \in \operatorname{argmin}\{\beta(M) : M \in \mathcal{R}_k\}$$

qui satisfait (2.14), i.e. cette sélection améliore des bornes. Pourtant, il y a bien d'autres règles qui n'utilisent pas explicitement cette propriété. Par exemple (cf. Tuy et al. [177]) :

**S1** : Pour chaque  $M$  on définit  $\mathcal{G}(M)$ , l'indice de l'étape où  $M$  est créé et à chaque itération, on choisit le plus "vieux" ensemble, c'est-à-dire

$$M_{k,i_k} \in \operatorname{argmin}\{\mathcal{G}(M) : M \in \mathcal{R}_k\}.$$



**S2 :** Pour chaque  $M$  on définit une quantité  $\delta(M)$  liée à la taille de  $M$  (e.g. le diamètre, le volume, etc). Supposons que la division soit telle que, étant donné  $\epsilon > 0$ , on peut toujours obtenir  $M$  avec  $\delta(M) \leq \epsilon$  après un nombre fini de division de  $M$ . Alors, on choisit

$$M_{k,i_k} \in \operatorname{argmin}\{\delta(M) : M \in \mathcal{R}_k\}.$$

### 2.2.3.3 Estimation de borne

Étant donné un ensemble  $M_k$ . Pour estimer une borne inférieure, on va construire  $T_k$  tel que  $M_k \cap S \subset T_k \subset M_k$  de manière que la borne  $\beta(M_k) = \min f(T_k)$  soit estimée par des efforts raisonnables.

**Définition 2.2.8** Soit  $\{T_k\}$  une suite d'ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Alors

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_k := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}, x_{n_j} \in T_{n_j}\},$$

$$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_k := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}, x_{n_j} \in T_{n_j} \text{ pour tout sauf un nombre fini de } n \in \mathbb{N}\},$$

$$T = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k \iff T = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_k = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} T_k.$$

□

Une division va générer des suites décroissantes  $\{M_k\}$  qui convergent vers un compact  $M := \bigcap_k M_k$ . Notons  $M_k \rightarrow M$ .

**Lemme 2.1** ([44]) Soit  $S \in \mathbb{R}^n$  un compact et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Alors l'estimation de borne est cohérente si, pour toute suite décroissante de compacts  $M_k$ , on a

- (i)  $M_k \rightarrow M$  compact,  $M \cap S \neq \emptyset$ .
- (ii) Il existe une suite de compacts  $T_k$  telle que

$$M_k \supseteq T_k \supseteq M_k \cap S, T_k \rightarrow M \cap S.$$

- (iii)

$$\min f(T_k) \leq \beta(M_k) \leq \min f(M_k \cap S).$$

- (iv)

$$\alpha(M_k) \rightarrow \min f(M \cap S).$$

L'estimation de borne présente toujours un dilemme entre la convergence et l'efficacité. Un algorithme SE va converger plus vite si on peut estimer des bornes d'une façon plus précise. Or, cela devrait coûter plus cher ce qui peut rendre l'algorithme moins efficace.

## 2.3 Les cas particuliers de SE

Depuis la création de SE, il a été largement utilisé et étudié. Dans cette section, nous allons présenter deux cas particuliers de SE. Ce sont les algorithmes de type SE appliqués aux problèmes

- (a) **dont le domaine des solutions admissibles est non convexe** : Nous nous intéressons aux problèmes linéaires ou quadratiques pour lesquels certaines variables sont discrètes,
- (b) **dont la fonction objectif est non convexe** : Ce sont des problèmes pour lesquels la fonction objectif est non convexe mais elle est séparable.

### 2.3.1 Le domaine est non convexe

Dans cette section, nous nous concentrons sur l'approche SE qui est appliquée afin de résoudre des problèmes mixtes en variables binaires. SE peut également être utilisé pour résoudre des problèmes d'optimisation en variables entières. Que ce soient les variables binaires ou entières, SE fait une énumération implicite de toutes les solutions possibles et il construit un arbre de recherche dont chaque nœud est associé à un problème continu basé sur le problème original. La racine de l'arbre est le problème original dont toutes les variables binaires (ou entières) sont relaxées.

A chaque itération, SE choisit un nœud de l'extrémité et résout le sous-problème correspondant. Quatre cas sont possibles (voir [167]) :

**Cas 1.** Le sous-problème n'est pas réalisable alors on peut le supprimer.

**Cas 2.** Le sous-problème a une valeur d'optimal supérieure à celle de la meilleure solution obtenue jusqu'au présent alors toutes les restrictions supplémentaires ne vont pas attribuer une meilleure solution. Nous supprimons le sous-problème.

**Cas 3.** Si la solution du sous-problème satisfait toutes contraintes binaires et de plus elle a une valeur inférieure à celle de la meilleure solution obtenue jusqu'au présent, alors nous sauvegardons la solution et nous faisons une mise à jour de la valeur optimale.

**Cas 4.** Si aucun des cas cités ci-dessus n'est pas réalisé alors (au moins) une des variables binaires est fractionnelle. Nous considérons deux nouveaux sous-problèmes. Pour chacun des nouveaux sous-problèmes, la variable fractionnelle est fixée à zéro ou un. Ensuite, nous ajoutons ces sous-problèmes à l'arbre de recherche comme les fils du sous-problème.

Enfin, nous sélectionnons le prochain sous-problème à résoudre. L'algorithme s'arrête s'il n'y a plus de problème à sonder.

La figure 2.1 montre un diagramme de l'algorithme SE pour un problème en variables mixtes.

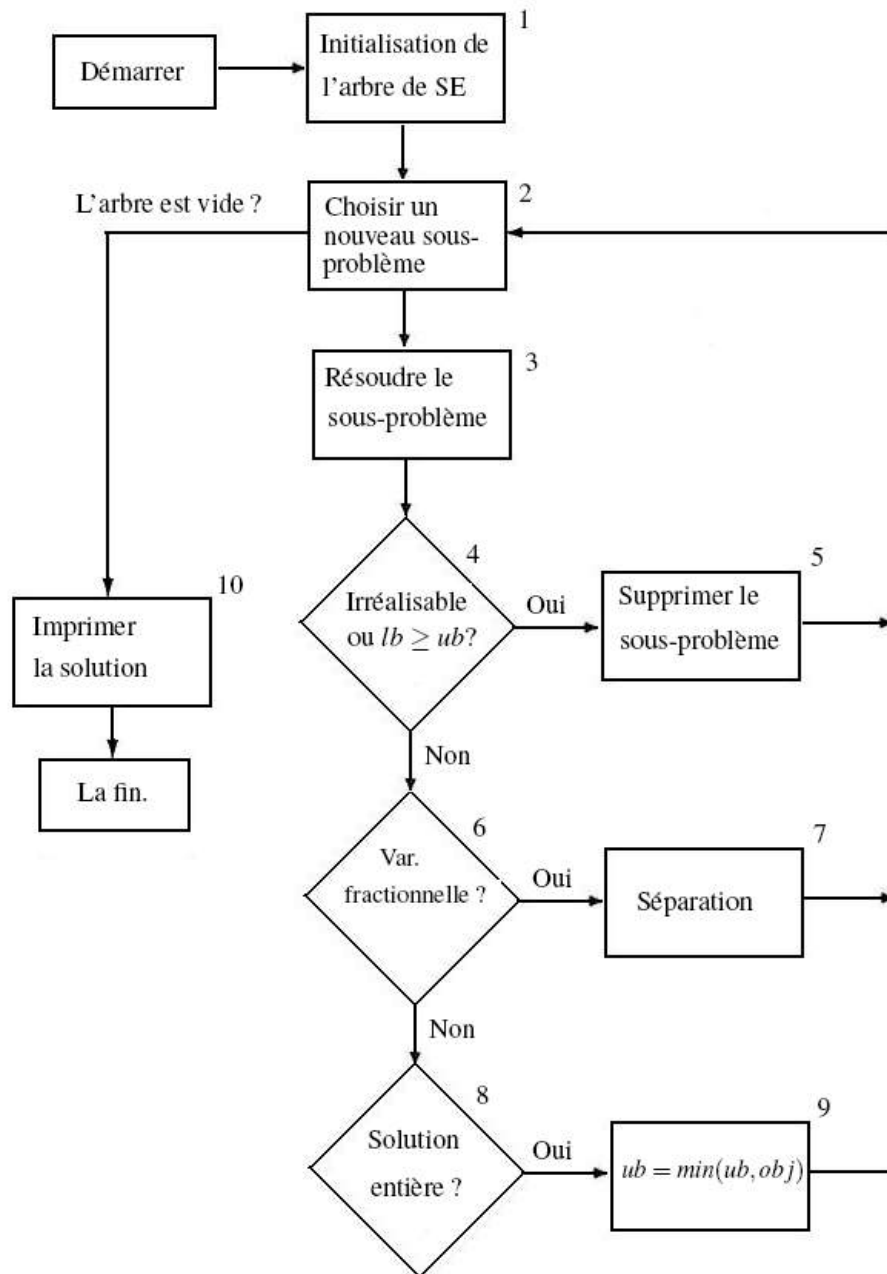


FIGURE 2.1 – Un schéma de base pour un algorithme par SE pour les problèmes mixtes

A l'étape 2, nous choisissons le sous-problème suivant. Il existe plusieurs façon de choisir un sous-problème parmi les tous. Deux d'entre elles sont les plus utilisées. La première consiste à choisir le dernier problème ajouté à l'arbre de recherche. Ce choix est dû aux problèmes qui ont le plus grand nombre de variables entières. De cette façon, nous allons plus de chance d'obtenir une solution entière. Deuxième approche est de choisir le sous-problème qui a la

plus petite valeur de fonction objectif. Le but est d'améliorer la borne inférieure le plus vite possible.

A la troisième étape, nous devons choisir la variable sur laquelle la séparation s'effectue. Nous pouvons choisir la variable qui est la plus proche d'un nombre entier ou choisir celle de premier, c'est-à-dire la variable qui a la plus petite indice d'ordre parmi les autres.

Pendant l'énumération implicite, si nous arrivons à bien diminuer le nombre de séparation ou la taille de l'arbre de recherche, alors l'approche par SE sera plus efficace. Pour atteindre ce but, nous développerons des algorithmes combinés à la base de SE qui

- cherchent à trouver des variables (qui doivent être binaires) qui s'approchent à 0 ou 1. Après les avoir localisées, nous allons les fixer à 0 ou 1, respectivement. La méthode DCA servira à trouver ces variables.
- utilisent des sous-approches locales (DCA) afin de trouver des solutions binaires plus vite. De cette façon, nous essayons d'améliorer la borne supérieure. Ayant une meilleure borne supérieure nous permet de supprimer plus de sous-problèmes (inutiles) et par conséquent d'avoir une convergence plus rapide.

La Figure (2.2) montre un diagramme de l'algorithme par SE révisé. A l'étape trois, après avoir résolu le sous-problème, nous utilisons sa solution pour démarrer DCA. Deux cas sont possibles :

- **La solution fournie par DCA est entière** : nous pouvons l'utiliser pour savoir s'il s'agit d'une solution améliorante. Si la valeur de fonction objectif associée à cette solution est inférieure à la valeur d'optimale (trouvée jusqu'à présent), nous faisons une mise à jour de la borne supérieure ainsi que de la valeur optimale.
- **La solution fournie par DCA n'est pas entière** : si certaines variables se sont approchées vers 0 ou 1, nous les fixons à 0 ou 1, respectivement. Ensuite, nous redémarrons DCA pour obtenir une solution entière. Puisque certaines variables sont déjà fixées à 0 ou 1, alors nous avons plus de chance d'avoir une solution entière. Cela va accélérer la convergence de l'algorithme.

### 2.3.2 La fonction objectif est non convexe

L'algorithme par séparation et évaluation que nous présentons se trouve dans [127].

Nous considérons le problème suivant

$$(P) : \min \{f(x) : x \in D \cap C \subset \mathbb{R}^n\}.$$

où  $D$  est un ensemble convexe et compact,  $C := \{x : l_i \leq x_i \leq L_i, i = 1, \dots, n\}$  est un rectangle. Nous supposons que la fonction objectif est séparable, c'est-à-dire

$$f(x) := \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$$

où  $f_i(x_i), i = 1, \dots, n$ , sont des fonctions non convexes. Dans cette section nous nous intéressons à la résolution du problème  $(P)$  en faisant une sous-estimation de la fonction

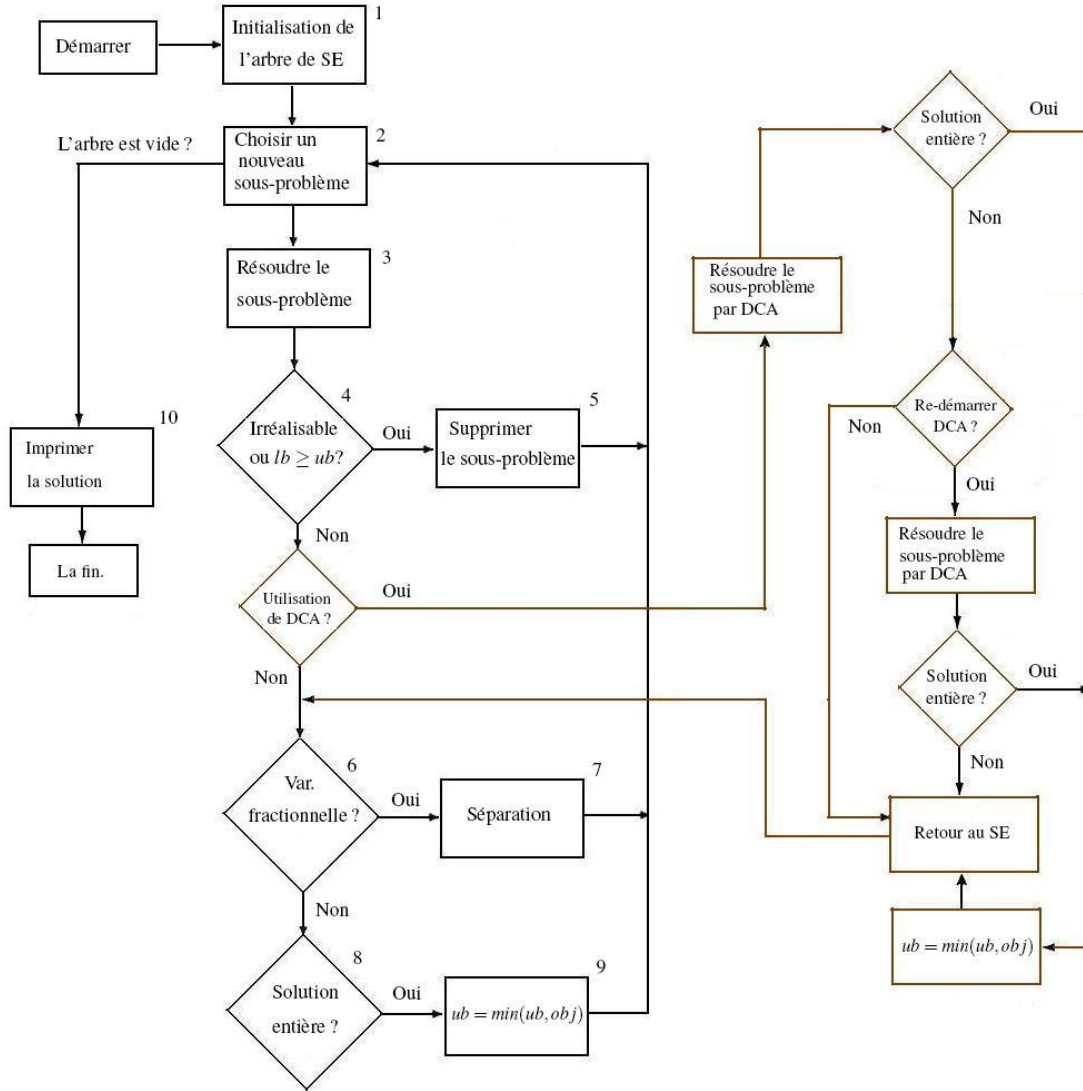


FIGURE 2.2 – Un schéma de base pour un algorithme par SE révisé (combiné avec DCA)

objectif par d'envelopes convexes. Soit  $\phi_i$  l'enveloppe convexe de  $f_i$  sur l'intervalle  $[l_i, L_i]$  alors  $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i$  est l'enveloppe convexe de  $f(x)$  sur le rectangle  $C$ .

Nous allons utiliser un algorithme de type SE afin de résoudre  $(P)$ . Pendant cet algorithme, on construit deux suites comme  $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}$ , celle de bornes inférieures et celle de bornes supérieures, respectivement. Pour cela, on construit une suite de points  $x_k$  telle que chacun de ces points est la solution d'un sous-problème comme  $P_{k^v}$ . Soit  $C_{k^v} \subset C$  un rectangle tel que

$$C_{k^v} = \{x : l^{k^v} \leq x \leq L^{k^v}\}.$$

La fonction objectif du problème  $P_{kv}$  est une enveloppe convexe de  $f$  sur  $C_{kv}$  et se définit par

$$\phi^{kv}(x) := \sum_{i=1}^n \phi_i^{kv}(x)$$

où  $f_i$  a été remplacé par son enveloppe convexe  $\phi_i^{kv}$  sur l'intervalle  $[l_i^{kv}, L_i^{kv}]$ . Le sous-problème  $P_{kv}$  associé au rectangle  $C_{kv}$  est

$$(P_{kv}) : \min \{ \phi^{kv}(x) : x \in D \cap C_{kv} \}.$$

Soit  $x^{kv}$  la solution optimale de  $P_{kv}$ , alors  $\phi^{kv}(x^{kv})$  est une borne inférieure pour  $f$  sur  $D \cap C_{kv}$  et  $f(x^{kv})$  est une borne supérieure pour la valeur optimale de  $(P)$ .

L'algorithme se résume comme la suite :

### Initialisation de l'algorithme par SE

Nous allons construire les premières bornes inférieure et supérieure. Soit  $\phi_i$  l'enveloppe convexe de  $f_i$  sur l'intervalle  $[l_i, L_i]$ . Alors  $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i$  est l'enveloppe convexe de  $f(x)$  sur le rectangle  $C$ , et nous résolvons le problème suivant

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \phi_i(x) : x \in D \cap C \right\}.$$

Soit  $x^0$  la solution optimale de ce problème, alors la première borne inférieure est  $\alpha_0 = \sum_{i=1}^n \phi_i(x^0)$  et la première borne supérieure est  $\beta_0 = \sum_{i=1}^n f(x^0)$ . Si  $\beta_0 - \alpha_0 \leq \epsilon$  alors  $x^0$  est une solution  $\epsilon$ -optimale, sinon nous devons choisir un intervalle à diviser. Nous choisissons cet intervalle de façon suivante, soit  $[l_t, L_t]$  l'intervalle pour lequel

$$f_t(x_t^0) - \phi_t(x_t^0) = \max\{f_i(x_i^0) - \phi_i(x_i^0) : i = 1, \dots, n\}$$

alors nous divisons l'intervalle  $[l_t, L_t]$  en deux, i.e.,  $[l_t, (l_t + L_t)/2]$  et  $[(l_t + L_t)/2, L_t]$  et nous ajoutons deux problèmes à l'ensemble des problèmes qui doivent être résolus par la suite. Ce sont deux problèmes suivants

$$\min \{f(x) : x \in D \cap C^1\} \tag{2.29}$$

et

$$\min \{f(x) : x \in D \cap C^2\} \tag{2.30}$$

où

$$C^1 := \{x : l_t \leq x_t \leq (l_t + L_t)/2, l_i \leq x_i \leq L_i : i \neq t\}$$

et

$$C^2 := \{x : (l_t + L_t)/2 \leq x_t \leq L_t, l_i \leq x_i \leq L_i : i \neq t\}.$$

### Itération $k$

A l'itération  $k$  de SE, il existe  $p_k$  rectangles  $\{C_{k1}, \dots, C_{kp_k}\}$ . Associé à chaque rectangle, il y a une enveloppe convexe qui sous-estime la fonction objectif,  $f$ . A la base de chaque rectangle, comme  $C_{kv}$ , nous construisons un problème relaxé dit  $(P_{kv})$  où  $v = 1, \dots, p_k$ . Ce problème se définit par

$$(P_{kv}) : \min \{\phi^{kv}(x) : x \in D \cap C_{kv}\}.$$

Soit  $x^{kv}$  la solution optimal de  $P_{kv}$ , alors  $\phi^{kv}(x^{kv})$  est une borne inférieure pour  $f$  sur  $D \cap C_{kv}$  et  $f(x^{kv})$  est une borne supérieure sur  $D \cap C_{kv}$ . Choisissons le rectangle qui a la plus petite valeur de fonction objectif. Alors,

$$\phi^{kv_k}(x^{kv_k}) = \min_v \phi^{kv}(x^{kv}), \quad v = 1, \dots, p_k.$$

Si  $f(x^{kv_k}) = \phi^{kv_k}(x^{kv_k})$  alors nous avons trouvé la solution optimal de  $(P)$  sinon nous passons à la prochaine étape qui consiste à diviser le rectangle  $C_{kv_k}$  en deux ou plusieurs. Pour simplifier la notation, soit  $y^k := x^{kv_k}$ . L'intervalle à être divisé est choisi de façon que

$$f_t(y_t^k) - \phi_t^{kv_k}(y_t^k) = \max\{f_i(y_i^k) - \phi_i^{kv_k}(y_i^k) : i = 1, \dots, n\}$$

et nous divisons l'intervalle  $[l_t^{kv_k}, L_t^{kv_k}]$  en deux, i.e.  $[l_t^{kv_k}, (l_t^{kv_k} + L_t^{kv_k})/2]$  et  $[(l_t^{kv_k} + L_t^{kv_k})/2, L_t^{kv_k}]$ . Ensuite, nous considérons deux nouveaux rectangles :

$$C_{kv_k}^1 = \left( \prod_{i=1, i \neq t}^n [l_i^{kv_k}, L_i^{kv_k}] \right) \times [l_t^{kv_k}, (l_t^{kv_k} + L_t^{kv_k})/2]$$

et

$$C_{kv_k}^2 = \left( \prod_{i=1, i \neq t}^n [l_i^{kv_k}, L_i^{kv_k}] \right) \times [(l_t^{kv_k} + L_t^{kv_k})/2, L_t^{kv_k}].$$

Enfin nous ajoutons deux problèmes qui correspondent à deux nouveaux rectangles à l'ensembles des problèmes qui doivent être résolus par la suite.

Chaque fois que nous obtenons une nouvelle borne qu'elle soit inférieure ou supérieure, nous la comparons avec les meilleures bornes et si c'est une borne améliorante alors nous la remplaçons. S'il s'agit de borne supérieure alors nous sauvegardons la solution qui lui correspond.

Lorsque la différence de la borne supérieure et la borne inférieure est suffisamment petite, l'algorithme s'arrête et la solution actuelle est l'optimum.





## Deuxième partie

# Gestion de portefeuille en finance : modèles et méthodes



# Chapitre 3

## Gestion de portefeuille : les notions de base

---

*Résumé* Ce chapitre concerne une introduction à la gestion de portefeuille, plus particulièrement aux différentes mesures de risque utilisées dans la littérature financière. La gestion de portefeuille consiste à gérer les capitaux confiés dans le respect des contraintes réglementaires et contractuelles et appliquant les politiques d'investissements définies en interne, pour en tirer le meilleur rendement possible en fonction du risque choisi. Dans ce chapitre, nous allons d'abord définir la rentabilité et le risque. Ensuite, la théorie d'utilité, la notion de dominance stochastique et la notion de cohérence seront présentées. Ces notions seront utilisées pour comparer des différentes mesures de risque que nous allons présenter par la suite.

---

### 3.1 Introduction

Imaginez un investisseur qui dispose d'un capital et qui a l'opportunité d'investir dans un certain nombre d'actifs financiers. Typiquement un tel investisseur doit prendre une décision importante. Comment répartir son capital parmi les actifs ? La gestion de portefeuille nous apporte la réponse. En gestion de portefeuille, nous nous intéressons aux problèmes de choix d'actifs financiers en présence de risque. Par exemple, il peut s'agir de choisir entre plusieurs actifs, ceux qui permettent au mieux, soit de minimiser le risque pour un rendement fixé, soit de maximiser le rendement pour un niveau fixé de risque. Alors les deux dimensions fondamentales d'un investissement financier sont le rendement et le risque. La rentabilité (ou le rendement) est la variation de la valeur accumulée d'un actif ou d'un portefeuille sur une période donnée. Alors que la rentabilité est simple à évaluer, il n'existe pas de façon unique d'évaluer le "risque".

Afin d'évaluer le risque d'un investissement, nous avons besoin des *informations* qui concernent les actifs composant le portefeuille. Ce sont les rentabilités des actifs, leur distribution et certaines propriétés stochastiques comme leur rentabilité moyenne et/ou la variance entre les rentabilités des actifs. Les informations peuvent aussi concerner les préférences des inves-

tisseurs. Ensuite, en utilisant ces informations nous nous servons des *critères* selon lesquels les actifs financiers sont classifiés par rapport à leur performance. Les critères dont nous disposons sont *Maximum d'Espérance d'Utilité (MEU)*, la *Dominance Stochastique (DS)* et la *Cohérence*. Enfin, ce sont les *procédures de calcul*, par lesquelles nous utilisons les informations afin de trouver les portefeuilles qui satisfont ces critères. Les procédures de calcul sont les différents modèles de choix de portefeuille que nous allons étudier dans ce chapitre. *Les informations, les critères et les procédures de calcul* caractérisent l'analyse de portefeuille.

Dans ce qui suit, nous allons d'abord présenter brièvement la rentabilité des actifs financiers et la notion de risque. Les critères de classification des portefeuilles seront présentés en section 3.2. La section 3.3 est consacrée aux procédures de calcul (les modèles de choix de portefeuille et les différentes mesures de risque). Une classification de différentes mesures de risque sera présentée en section 3.4.

### 3.1.1 Les rentabilités des actifs financiers

La rentabilité est une notion fondamentale en finance et elle apparaît dans l'expression de la plupart des modèles de gestion de portefeuille.

**Définition 3.1.1** (*La rentabilité*)

*La rentabilité mesure l'appréciation (ou dépréciation) relative de la valeur d'un actif financier ou d'un portefeuille d'actifs financiers entre deux instants successifs [2].* □

Soient  $t$  et  $t + 1$  deux instants successifs. Nous notons  $P_t$  et  $P_{t+1}$  les valeurs (prix) de l'actif aux instants  $t$  et  $t + 1$ , respectivement. Nous calculons la rentabilité réalisée dans l'intervalle  $[t, t + 1]$  par

$$r_t = (P_{t+1} - P_t)/(P_t).$$

Si un flux financier  $D_{t+1}$  tel qu'un dividende est reçu entre  $t$  et  $t + 1$ , cette formule devient

$$r_t = (P_{t+1} - P_t + D_{t+1})/(P_t).$$

Par la suite, nous supposons que de tels flux sont incorporés à la valeur finale  $P_{t+1}$ .

De nombreux modèles financiers utilisent des séries historiques de cours boursiers pour estimer les propriétés stochastiques des rentabilités correspondantes comme leur rentabilité moyenne. Plusieurs méthodes sont disponibles. Celle que nous avons adoptée consiste en le calcul des rentabilités de sous-périodes, ensuite nous utilisons la formule suivante

$$\bar{r} = (1/T) \sum_{t=1}^T r_t.$$

Nous considérons, en général, que les rentabilités des cours boursiers possèdent des densités de probabilités normales et identiquement distribuées. Soit 'a' un actif avec la rentabilité

aléatoire  $r$  qui possède une telle distribution avec la moyenne  $\mu$  et l'écart-type  $\sigma$  c'est-à-dire  $r \sim N(\mu, \sigma)$ . Dans ce cas, la densité de probabilité de la variable aléatoire  $r$  s'écrit

$$f(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{r - \mu}{\sigma} \right)^2 \right].$$

L'hypothèse selon laquelle les rentabilités des actifs financiers sont normalement distribuées est souvent faite dans la littérature financière. Mais ceci ne correspond pas à la réalité. En général, les rentabilités sur les marchés ne suivent pas de loi gaussienne. Dans ce cas deux autres propriétés stochastiques entrent en jeu, ce sont la *skewness* et la *kurtosis*.

La *skewness* (ou *coefficient d'asymétrie*) d'une variable aléatoire se définit par

$$Sk = \frac{\mathbb{E}[r - \mathbb{E}(r)]^3}{\sigma(r)^3}.$$

Pour calculer la coefficient d'asymétrie d'une série de  $m$  observations, on utilise la formule

$$Sk = \frac{\left(\frac{1}{m-1}\right) \sum_{t=1}^m (r_t - \mu)^3}{\hat{\sigma}(r)^3}$$

où  $\mu$  est la moyenne des rentabilités et  $\hat{\sigma}(r)$  l'estimateur de leur écart-type. Pour une distribution normale,  $Sk$  est égale à zéro.

La *kurtosis* (ou *indice d'aplatissement*) d'une variable aléatoire est

$$K = \frac{\mathbb{E}[r - \mathbb{E}(r)]^4}{\sigma(r)^4}$$

et de la même manière que la coefficient d'asymétrie, l'indice d'aplatissement d'une série de  $m$  observations se calcule en utilisant la relation

$$K = \frac{\left(\frac{1}{m-1}\right) \sum_{t=1}^m (r_t - \mu)^4}{\hat{\sigma}(r)^4}.$$

Pour une distribution normale  $K = 3$ .

### 3.1.2 Le risque

Le risque est défini de différentes manières ([5], [43], [65]). L'une d'elles que nous allons adopter est celle de ATHEARN [5] et CROWE et HORN [20] dont le risque est défini comme étant lié à l'incertitude et d'autre part, causé par les écarts non attendus des résultats par rapport à l'objectif attendu. C'est-à-dire que nous fixons l'objectif et nous comparons les réalisations des rentabilités des actifs par rapport à cet objectif. La définition des réalisations qu'elles soient attendues ou non attendues dépend de l'investisseur et/ou du modèle. D'après cette définition, le risque porte sur deux aspects importants. D'abord, le risque est de nature

incertaine et de plus, il n'est pas attendu. Cette définition distingue les réalisations qui portent sur des profits et celles qui indiquent les pertes. Parfois les réalisations qui sont les plus proches de l'objectif fixé en amont sont considérées comme les réalisations attendues et parfois nous souhaitons seulement les réalisations qui sont supérieures à un objectif précis.

Dès que nous parlons de risque, nous pouvons distinguer deux types d'actifs financiers. Les actifs sans risques et les actifs risqués. Un actif sans risque est celui qui atteint le résultat,  $x$ , avec certitude, c'est-à-dire avec la probabilité de 1, ou  $p(x) = 1$  où  $p$  est la fonction de probabilité. A l'opposé, nous avons l'actif risqué pour un tel actif, il y a plusieurs résultats possibles, comme  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , parmi lesquels il y a au moins un  $x_i$  avec  $0 < p(x_i) < 1$ .

Plutôt que d'analyser les risques au niveau des actifs individuels, nous voulons mesurer les risques au niveau du portefeuille. Car pour un investisseur, il n'est pas raisonnable d'investir tout son capital dans un seul actif mais il doit, au contraire, investir sur un ensemble d'actifs, c'est-à-dire un portefeuille d'actifs. En effet, le portefeuille garantit un taux de rendement moyen élevé et présente moins de fluctuations négatives de ses actifs pour le même niveau de risque, cette propriété s'appelle la *diversification* [128]. La diversification réduit le risque. S'il y a une bonne diversification, le risque d'un portefeuille est inférieur à la somme de risques de chacun des titres le composant. En fait, le risque d'un actif se compose, d'après le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) (ou Capital Asset Pricing Model (CAPM)), du risque systématique et du risque spécifique. Le risque spécifique est le risque propre à l'actif considéré, c'est un risque diversifiable, c'est-à-dire qu'il peut être éliminé avec une bonne diversification du portefeuille. Le risque systématique ou risque de marché est dû aux fluctuations générales du marché et ne peut pas être éliminé par la diversification. Ce dernier doit être supporté par les investisseurs [128].

L'analyse du risque de portefeuille est plus compliquée que celle d'un seul actif car il faut observer le comportement de différents actifs, notamment à cause de la disparité de leur rendement respectif. De plus, il y a fort probablement des corrélations entre les différents actifs. Autrement dit, le risque de l'investissement est en relation avec les autres. En outre, l'investisseur ne peut pas négliger l'influence des décisions des autres investisseurs sur les siennes. En général, un investisseur peut avoir trois attitudes différentes :

1. **risque-averse (riscophobe)** : l'investisseur qui évite le risque,
2. **risque-neutre** : l'investisseur qui est indifférent à la prise de risque,
3. **riscophile** : l'investisseur qui n'hésite pas à prendre le risque.

Alors chaque investisseur éprouve une certaine aversion au risque.

## 3.2 Les critères

Dans cette section, nous allons présenter quelques notions basées sur des axiomes. Ces notions vont nous aider à bien comparer les différentes mesures de risque. Chacune d'entre elles est un ensemble de critères qu'un portefeuille doit satisfaire pour qu'il soit classifié comme celui que l'investisseur préfère.

Pour un investisseur, l'objectif principal est la rentabilité et la profitabilité. Alors nous allons d'abord étudier une notion qui est basée sur l'hypothèse selon laquelle l'investisseur connaît bien la loi de distribution des rendements.

### 3.2.1 Le critère de Maximum d'Espérance d'Utilité

La théorie d'utilité fournit une façon d'exprimer la sensibilité de l'individu au risque. Pour cela, la théorie d'utilité étudie les préférences des individus et leurs représentations numériques au sein des fonctions d'utilité.

En 1947, von Neumann et Morgenstern ont mis au point un ensemble d'axiomes concernant les préférences des individus. Dans leur étude, von Neumann et Morgenstern ont adopté une convention. Ils supposent que l'individu connaît la loi de distribution des revenus aléatoires. Ici, il est supposé que l'individu est rationnel, c'est-à-dire que son comportement est défini au moyen de cet ensemble d'axiomes.

Pour chaque individu (rationnel) on peut définir une fonction d'utilité dont l'argument est la richesse et l'individu peut utiliser l'espérance mathématique afin de classer tous les investissements risqués. Plus précisément, une fonction d'utilité est une règle par laquelle on associe un indice numérique à chacun des investissements de sorte que les préférences de l'individu se manifestent par le fait que cet indice d'"utilité" est d'autant plus élevé que la préférence est grande.

Soit  $L = \{p_1A_1, p_2A_2, \dots, p_nA_n\}$  un *investissement risqué simple* ou plus simplement un *investissement (risqué)*, où les  $A_i$  sont des  $n$  résultats possibles avec les probabilités  $p_i$ . Les axiomes du critère de Maximum d'Espérance d'Utilité (MEU) sont les suivants [108] :

**Axiome 1 : Comparabilité.** D'après cet axiome, en face de deux revenus monétaires, l'investisseur doit choisir entre  $A_i$  et  $A_j$ . Soit il préfère  $A_i$  à  $A_j$  ( $A_i \succ A_j$ ), soit il préfère  $A_j$  à  $A_i$  ( $A_j \succ A_i$ ) soit  $A_i$  et  $A_j$  lui sont indifférents ( $A_i \sim A_j$ ).

**Axiome 2 : Continuité (valeur intermédiaire).** Si l'investisseur préfère  $A_3$  à  $A_2$  et  $A_2$  à  $A_1$ , alors il existe une probabilité  $U(A_2)$  ( $0 \leq U(A_2) \leq 1$ ) telle que,

$$L = \{(1 - U(A_2))A_1, (U(A_2))A_3\} \sim A_2.$$

En fait, l'individu ne doit pas exprimer de discontinuité dans ses choix, par exemple, si l'investisseur préfère  $A_3$  à  $A_1$ , on veut que  $A_2$  qui est extrêmement proche de  $A_3$  soit préféré à  $A_1$ .

**Axiome 3 : Interchangeabilité.** Supposons que  $L_1 = \{p_1A_1, p_2A_2, p_3A_3\}$  soit un investissement. Si l'investisseur est indifférent entre  $A_2$  et  $B$ , tels que  $B = \{q_1A_1, (1 - q_n)A_3\}$ , alors l'axiome d'interchangeabilité dit que l'investisseur est indifférent entre  $L_1$  et  $L_2$  où  $L_2 = \{p_1A_1, p_2B, p_3A_3\}$ .

**Axiome 4 : Transitivité.** Soient  $L_1, L_2, L_3$  les investissements possibles et  $L_1 \succ L_2$  et  $L_2 \succ L_3$ . D'après l'axiome de transitivité  $L_1 \succ L_3$ . De la même manière, si  $L_1 \sim L_2$  et

$L_2 \sim L_3$  alors  $L_1 \sim L_3$ . Cet axiome est typiquement un axiome de rationalité puisqu'il établit que l'individu doit faire preuve d'une cohérence interne dans ses choix.

**Axiome 5 : Décomposabilité.** Un investissement complexe est un investissement dont les résultats se composent d'investissements simples. Soit  $L^*$  un investissement complexe tel que

$$L^* = \{qL_1, (1 - q)L_2\}$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont les investissements simples tels que

$$L_1 = \{p_1A_1, (1 - p_1)A_2\},$$

$$L_2 = \{p_2A_1, (1 - p_2)A_2\}.$$

Selon l'axiome de Décomposabilité,  $L^*$  peut être décomposé en un investissement simple comme  $L$  qui contient seulement  $A_1$  et  $A_2$ . Plus précisément,

$$L^* \sim L = \{p^*A_1, (1 - p^*)A_2\}$$

avec  $p^* = qp_1 + (1 - q)p_2$ .

**Axiome 6 : Monotonie.** Soient  $L_1 = \{pA_1, (1 - p)A_2\}$  et  $L_2 = \{pA_1, (1 - p)A_3\}$ . Si  $A_3 > A_2$ , et alors  $A_3 \succ A_1$ , D'après cet axiome on a  $L_2 \succ L_1$ .

Nous pouvons prouver (voir [108]) qu'en acceptant ces axiomes, le critère de (MEU) est la meilleure méthode de prise de décision et les investissements doivent être classifiés selon leur espérance d'utilité.

D'après les idées de von Neumann et Morgenstern, la première propriété de la fonction d'utilité est la richesse. C'est-à-dire qu'entre deux investissements existants, celui qui donne plus de revenu est préféré. La deuxième propriété de la fonction d'utilité est l'attitude de l'individu vis à vis du risque. Ce sont les trois positions différentes de l'individu que nous avons citées ci-dessus, c'est-à-dire : riscophobe, risque-neutre et riscophile.

Soient  $U(w)$  la fonction d'utilité (en fonction de la richesse  $w$ ) et  $U''(w)$  la dérivée seconde de la fonction d'utilité. Chaque individu rationnel veut maximiser l'espérance mathématique de  $U(w)$ , i.e.,  $E[U(w)]$  (d'où vient le nom Maximum d'Espérance d'Utilité (MEU)) [24].

**Définition 3.2.1** (le critère d'espérance d'utilité) [24]

Les préférences d'un individu satisfont au critère d'espérance d'utilité s'il existe une fonction croissante  $U$  appelée fonction d'utilité telle que l'individu préfère le rendement aléatoire  $w_1$  au rendement aléatoire  $w_2$  si et seulement si l'espérance d'utilité de  $w_1$  est supérieure à celle de  $w_2$  :

$$w_1 \text{ préféré à } w_2 \iff E[U(w_1)] \geq E[U(w_2)].$$

□



La croissance de la fonction d'utilité exprime simplement que l'individu aime la richesse.

En utilisant la fonction d'utilité, les comportements des individus à l'égard du risque se traduisent comme suit :

1. **risque-averse (riscophobe)** : Si l'investisseur est risque-averse, alors  $U(w) > E[U(w)]$ , tel que  $U''(w) < 0$ ,
2. **risque-neutre** : Si l'investisseur est risque-neutre, alors  $U(w) = E[U(w)]$ , tel que  $U''(w) = 0$ ,
3. **riscophile** : Si l'investisseur est riscophile, alors  $U(w) < E[U(w)]$ , tel que  $U''(w) > 0$ .

Quelques années après les travaux de von NEUMANN et de MORGENSTERN, MARKOWITZ [1952,1959] et TOBIN [1958] ont utilisé la théorie d'utilité afin de résoudre le problème de choix de portefeuille.

Même si le critère d'espérance d'utilité a un fondement solide, il présente certains défauts. Soient  $A$  et  $B$  deux investissements risqués et  $U$  la fonction d'utilité d'un investisseur. En utilisant le critère d'espérance d'utilité, nous pouvons associer un nombre à chacun de ces investissements (les nombres peuvent être égaux). Soient  $U(A) = a$  et  $U(B) = b$ ,  $a$  et  $b$  peuvent nous aider à classer les investissements  $A$  et  $B$  selon la préférence de l'investisseur. Ils n'ont pas d'autre signification. C'est-à-dire qu'il ne peuvent pas nous dire la magnitude de préférence. Par exemple, si  $a = 150$  et  $b = 100$ , cela ne dit pas que l'investissement  $A$  est 50% mieux que l'investissement  $B$ . En bref, le critère d'espérance d'utilité est un critère plutôt *ordinal* que *cardinal*. Ce fait est le premier défaut du critère de MEU [108].

L'autre défaut du critère de MEU est lié à la richesse. Soit  $w$  la richesse initiale de l'investisseur et notons  $x$  le revenu sur la richesse initiale à la fin de la période de l'investissement. Alors la richesse totale est  $w + x$ . Contrairement au caractère constant de  $w$ , nous savons que  $x$  est une variable aléatoire. L'inclusion de  $w$  dans l'utilité est cruciale. Mais contrairement à l'importance de  $w$  en théorie d'utilité, les investisseurs prennent leurs décisions en se concentrant plus particulièrement sur les fluctuations de  $x$ , alors que  $w$  reste en arrière plan ou même  $w$  est négligé. Cela signifie que les investisseurs prennent leurs décisions sur  $U(x)$  au lieu de  $U(w + x)$ , où  $U$  est la fonction d'utilité de l'investisseur [108].

Prendre la décision selon la fluctuation de la richesse est en contradiction avec les fondements de base de l'espérance d'utilité [108]. Ce n'est pas le cas pour la notion de la *Dominance Stochastique (DS)* même si DS est une dérivée de la théorie de l'espérance d'utilité. En utilisant DS, on partitionne l'ensemble des investissements possible en deux, celui des investissements efficaces et celui des investissements inefficaces. Cette classification est invariante par rapport à  $w$ . DS est la notion que nous allons aborder dans la section suivante.

### 3.2.2 Dominance stochastique

La *Dominance Stochastique (DS)* est basée sur les axiomes des préférences des individus à l'égard de l'aversion au risque [30]. Tout d'abord, DS était la généralisation des travaux en théorie de majorisation (Hardy et al. [40]) par HANOCH et LEVY [41]; ROTHCHILD et

STIGLITZ, [151]. En suite, il a été largement utilisé en économie et en finance ([11], [107] et [125] et les références incluses).

En gestion de portefeuille, la notion de DS est utilisée pour mettre en ordre les portefeuilles et nous supposons que nous connaissons la distribution des rendements aléatoires des actifs. A la base de cette convention sur les distributions, DS met en ordre les rendements des actifs tels que les rendements dominants ont une espérance d'utilité supérieure à celles des rendements dominés. Ce raisonnement s'applique sans avoir besoin d'information sur la fonction d'utilité des investisseurs.

Dans la suite, nous allons présenter brièvement la dominance stochastique en premier, deuxième et troisième ordre [108].

Nous supposons qu'il existe deux distributions des rentabilités, nommées  $F$  et  $G$ , sur le domaine  $D \subset [a, b)$ . Ici,  $F DSP G$  veut dire que "F" domine "G" stochastiquement en premier ordre,  $F DSD G$  montre que "G" est dominé par "F" stochastiquement en deuxième ordre. Finalement,  $F DST G$  c'est-à-dire que "F" domine "G" stochastiquement en troisième ordre. Mathématiquement [65] :

- $F DSP G$  : si  

$$F(r) \leq G(r) \quad \forall r \in D \text{ et } \exists r^* : F(r^*) < G(r^*)$$
 sous l'hypothèse que  $U' > 0$ . Cela veut dire que  $\mathbb{E}(U(r|F)) > \mathbb{E}(U(r|G))$ .
- $F DSD G$  : si  

$$\int_a^r F(p)d(p) \leq \int_a^r G(p)d(p) \quad \forall r \in D \text{ et } \exists r^* : \int_a^{r^*} F(p)d(p) \leq \int_a^{r^*} G(p)d(p)$$
 sous l'hypothèse que  $U' > 0$  et  $U'' < 0$ . Cela veut dire que si  $F DSD G$  alors  $\mathbb{E}(U(r|F)) > \mathbb{E}(U(r|G))$ .
- $F DST G$  : si  

$$\int_a^r (\int_a^q F(p)d(p))dq \leq \int_a^r (\int_a^q G(p)d(p))dq \quad \forall r \in D \text{ et}$$

$$\exists r^* : \int_a^{r^*} (\int_a^q F(p)d(p))dq < \int_a^{r^*} (\int_a^q G(p)d(p))dq,$$
 sous l'hypothèse que  $U' > 0$  et  $U'' < 0$  et  $U''' > 0$  et  $\mathbb{E}(r|F) \geq \mathbb{E}(r|G)$ . Cela veut dire que si  $F DST G$  alors  $\mathbb{E}(U(r|F)) > \mathbb{E}(U(r|G))$ .

Plus l'ordre est grand, plus le nombre de portefeuilles dominés est grand. Ceci résulte du fait que si un portefeuille est efficient au sens du critère du troisième ordre, il est aussi efficient pour le deuxième et le premier ordre mais la réciproque n'est pas forcément vérifiée.

En fait,  $DSP$ ,  $DSD$ , et  $DST$  partitionnent l'ensemble des actifs risqués en deux sous-ensembles : l'ensemble des portefeuilles efficients et celui des portefeuilles inefficaces.

La notion de dominance stochastique est moins restrictive que l'hypothèse quadratique pour les fonctions d'utilités [65]. Cette hypothèse est fondamentale pour l'approche Moyenne-Variance que nous allons aborder dans la section (3.3). Puisque le concept de DS est exhaustif, alors une mesure de risque, compatible avec DS, est préférée. Ceci est vrai pour les mesures LPM dont on parlera en sections (3.3).

### 3.2.3 La cohérence

Malheureusement, les mesures de risque les plus utilisées en pratique ne reflètent pas de façon correcte les préférences des investisseurs. Afin de surmonter ce problème, des mesures de risque cohérentes ont été proposées. ARTZNER et al. [4] ont défini quatre propriétés qu'une mesure de risque doit satisfaire pour qu'elle soit cohérente.

**Définition 3.2.2** Soit  $V$  un ensemble de variables aléatoires avec des valeurs réelles, une mesure de risque est une fonction à valeurs réelles comme  $\rho$ , telle que

$$\rho : V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

□

Soit  $\rho$  une mesure de risque, pour  $v, v' \in V$ ,  $\rho$  est dite cohérente si elle est

1. **sous-additive** :  $\rho(v + v') \leq \rho(v) + \rho(v')$ .

La mesure de risque d'une somme de deux portefeuilles est inférieure à la somme des mesures de risque de ces deux portefeuilles. Ce résultat est dû à la corrélation qui peut exister entre ces derniers.

En effet, cette propriété reflète le gain de diversification.

2. **positivement homogène** :  $\rho(\lambda v) = \lambda \rho(v) \quad \forall \lambda \geq 0$ .

La propriété d'homogénéité positive est *un cas limite* de la propriété de sous-additivité qui représente l'absence de diversification.

3. **invariante par translation** :  $\rho(v + c) = \rho(v) - c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$ .

La propriété d'invariance par translation signifie que l'addition (ou la soustraction) d'un montant initial sûr (i.e., sans risque) ' $c$ ' au portefeuille initial décroît (accroît) simplement la mesure du risque  $\rho$  par  $c$ .

On constate que l'addition d'un montant initial égal au  $\rho(v)$  réduit le risque à 0 soit  $\rho(v + \rho(v)) = \rho(v) - \rho(v) = 0$ .

4. **monotone** : Si  $v \leq v'$  alors  $\rho(v) \geq \rho(v')$ .

D'après cette propriété, si un portefeuille a un capital requis supérieur à celui d'un autre, alors le risque associé au portefeuille dont le capital requis est le plus élevé est inférieur à celui de l'autre.

La sous-additivité favorise la diversification. La sous-additivité et la positivement homogénéité garantissent la convexité de la mesure de risque, ce qui est un avantage en gestion de portefeuille [34].

## 3.3 Les mesures classiques de risque

Dans cette section nous allons aborder la quantification de risque. Pour cela nous allons exposer certaines mesures de risque.

### 3.3.1 La variance

Une mesure classique de risque est la variance,  $Var$ , et sa racine carrée dite *écart-type*,  $\sigma$ . Il est bien connu que *Markowitz* est la première personne qui a utilisé la variance comme la mesure de risque ([112, 113]). Markowitz a bien marqué le début de la théorie moderne de portefeuille où pour la première fois, le problème de choix de portefeuille a été clairement mis au point et résolu. Markowitz a proposé un modèle basé sur deux notions de probabilité, l'espérance mathématique des rendements et la variance entre les rendements [29]. Le modèle de Markowitz essaie de partager la richesse parmi les actifs tout en réduisant la variance de portefeuille.

**Définition 3.3.1** Soit  $f$  la fonction de densité d'une variable aléatoire  $r$ , nous définissons la variance de  $r$  par

$$Var(r) = \sigma^2(r) := \int_{-\infty}^{\infty} (r - \mathbb{E}(r))^2 f(r) dr \quad (3.1)$$

où  $\mathbb{E}$  est l'opérateur d'espérance mathématique et  $r$  est une variable continue. Pour le cas où  $r$  est une variable discrète, la variance de  $r$  se définit par

$$Var(r) = \sigma^2(r) := \sum_r (r - \mathbb{E}(r))^2 f(r) \quad (3.2)$$

où la somme est effectuée sur toutes les valeurs possibles de  $r$ . □

Si  $r$  est le rendement d'un portefeuille, alors la variance de rendement sera le carré de l'écart-type du rendement par rapport à l'espérance mathématique du rendement.

Supposons qu'une liste des rendements historiques soit disponible. La liste contient les rendements historiques de  $n$  actifs pendant  $m$  périodes. A partir de cette liste nous définissons le rendement moyen de chaque actif en utilisant la formule suivante

$$r_i := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{ij}$$

où  $r_{ij}$  est le rendement de l'actif  $i$  en période  $j$  tel que  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, m$ .

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , les  $n$  actifs sous risque (risqués) qui forment les portefeuilles. De plus nous supposons que  $x_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  et les variables  $x_i$  correspondent aux rendements aléatoires  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^t$ . Le rendement du portefeuille  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  est  $R = \mathbf{x}^t \mathbf{r}$  et le risque dédié au portefeuille est défini par  $\sigma^2 = \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x}$ .  $\mathbf{Q}$  est la matrice de Variance-Covariance dont l'élément  $(i, j)$  est calculé par

$$\sigma_{i,j} := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (r_{ik} - r_i)(r_{jk} - r_j). \quad (3.3)$$

En fait,  $\sigma_{i,j}$  présente la covariance entre les actifs  $i$  et  $j$ . Pour le cas où  $i = j$ , la formule (4.1) définit la variance de l'actif  $i$ .

Markowitz a démontré que pour un investisseur rationnel qui cherche à maximiser l'espérance mathématique de la fonction d'utilité, le portefeuille efficient est celui qui a le plus haut rendement espéré pour un niveau fixé de risque et celui qui a le moindre de risque pour un niveau fixé de rendement.

**Définition 3.3.2** (le critère de Moyenne-Variance (MV))

Les préférences d'un individu satisfont au critère moyenne-variance s'il existe une fonction  $U(.,.)$  définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  telle que l'individu préfère le rendement  $r_1$  au rendement  $r_2$  si et seulement si

$$U(E(r_1), var(r_1)) > U(E(r_2), var(r_2)).$$

□

En général, nous supposons que  $U$  croissante par rapport à la première variable et décroissante par rapport à la seconde, afin d'exprimer l'amour de la richesse, et l'aversion pour le risque. Dans ce cas un individu choisira toujours un portefeuille MV-efficace, c'est-à-dire le portefeuille qui minimise la variance pour l'espérance de rendement donnée [24].

HANOCH et LEVY [41] ont démontré que le critère de MV est un critère fiable quelque soit la fonction d'utilité de l'individu si la distribution est la Gaussienne.

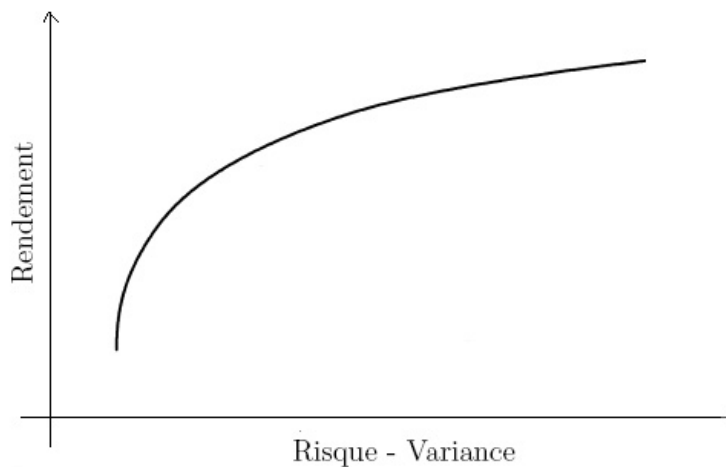


FIGURE 3.1 – Exemple de la courbe des portefeuilles efficients

L'idée de Markowitz nous permet de tracer la courbe des portefeuilles efficients. Cette courbe est composée des portefeuilles qui attribuent le risque minimum ( $V$ ) pour un gain fixé ( $R$ ) ou

les portefeuilles qui ont le gain maximal pour un risque fixé ( $V$ ) (Voir la Fig. 3.1). Pour tracer cette courbe nous pouvons résoudre le problème quadratique convexe suivant qui minimise le risque ( $x^t Q x$ ) pour un gain fixé ( $R$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ s.c. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n r_j x_j = R, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

En pratique, le modèle suivant est très utilisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} - (1 - \lambda) \sum_{j=1}^n r_j x_j \\ s.c. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

où  $\lambda$  est le paramètre d'aversion au risque et  $0 \leq \lambda \leq 1$ .  $\lambda = 1$  correspond à l'individu purement risque-averse et  $\lambda = 0$  correspond à celui qui n'a aucune peur de prendre le risque. De la même manière, si nous faisons varier  $\lambda$  entre 0 et 1, nous pourrions tracer la courbe des portefeuilles efficients.

L'utilisation de la variance comme mesure de risque a des avantages et des inconvénients. L'avantage de cette mesure de risque est sa simplicité. De plus, en utilisant la matrice de variance-covariance, nous pouvons construire un modèle de programmation quadratique convexe ([7],[29]) afin de calculer les portefeuilles efficients. Actuellement, un problème quadratique convexe se résout facilement même pour des dimensions très grandes comme 10000 [60]. Mais cela ne suffit pas car certaines contraintes du monde réel ne sont pas prises en compte dans le modèle de base. Nous parlerons de ces contraintes non prises en compte dans les prochains chapitres.

L'approche de Markowitz est plus connue sous le nom de l'approche Moyenne-Variance (MV). Cette approche connaît aussi certains inconvénients. D'abord, elle suppose que, soit les rendements suivent une distribution normale (ou multi-normale), soit la fonction d'utilité est quadratique [24]. Ces deux cas sont malheureusement assez peu réalistes. La deuxième critique est due au manque de sensibilité du modèle quant aux différences entre les gains et les pertes car l'approche MV pénalise de la même manière les gains ou les pertes s'éloignant trop de la moyenne [7]. L'approche MV n'est pas, en général, compatible avec la dominance stochastique [59]. Finalement, l'approche MV n'est pas cohérente car elle ne respecte pas les axiomes de monotonie et d'invariance par translation [34].

Après le travail de Markowitz, les modèles alternatifs ont été développés pour pallier aux défauts du modèle MV.

### 3.3.2 La mesure de risque de baisse

En 1959, Markowitz s'était rendu compte des limites de l'approche MV. Il a proposé la *semivariance*. La *semivariance* est une mesure de type dite *les mesures de risque de baisse*. Ce type de mesure se concentre essentiellement sur les pertes. Les mesures de risque de baisse sont aussi utiles quand les rendements suivent une distribution non-gaussienne [27].

La semivariance prend en compte seulement les écarts qui sont inférieurs à un *objectif* [27].

Mathématiquement, la mesure de semivariance est définie comme suit ([34],[65]) :

$$SV_T := \sum_r ([r - T]^-)^2 f(r) \quad (3.6)$$

où  $T$  est l'objectif et  $f$  est la fonction de densité de rendement aléatoire  $r$ . Markowitz suppose que  $T$  est égal à l'espérance de rendement,  $\mathbb{E}(r)$ , d'où vient le nom *semivariance*. Dans ce cas nous avons :

$$SV_R := \sum_r ([r - \mathbb{E}(r)]^-)^2 f(r). \quad (3.7)$$

La semivariance prend en compte seulement les écarts associés aux valeurs de  $r$  qui sont inférieures à l'espérance des rendements.

L'idée des mesures de risque de baisse est à l'origine du fait que les investisseurs sont favorables aux rentabilités supérieures à l'objectif [7]. Malgré l'apparence logique de ce type de mesures de risque, elles provoquent certaines critiques. Tous les investisseurs ne sont pas d'accord avec cette méthode, certains ne croient pas que cette méthode puisse mesurer correctement les risques. De plus, tous ne sont pas d'accord sur le même objectif. En effet, cette méthode est très *subjective* [108]. Enfin, la semivariance n'est pas une mesure de risque cohérente.

### 3.3.3 Le modèle de Mean-Absolute Deviation (MAD)

Konno et Yamazaki [62] ont mis au point un modèle afin de remplacer celui de MV par leur modèle de programmation linéaire. Considérons  $R_j$  comme une variable aléatoire qui représente le taux d'intérêt de l'actif  $j$ . Nous supposons que  $(R_1, R_2, \dots, R_n)$  est distribué sur un ensemble fini de points  $(r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt})$  où  $t = 1, \dots, T$  et que

$$\varphi_t = Pr\{(R_1, R_2, \dots, R_n) = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt})\} \quad (3.8)$$

soient connus auparavant pour  $t = 1, \dots, T$ . Nous utilisons les notations suivantes

- $M$  = le capital,
- $x_j$  = la portion du capital investi en actif  $j$ ,
- $\alpha_j$  = la borne supérieure pour l'investissement en actif  $j$ ,
- $\omega$  = le niveau de risque autorisé.

La déviation absolue  $W(x)$  du portefeuille  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  se définit par

$$W[R(x)] = E[|R(x) - E[R(x)]|] = \sum_{t=1}^T \wp_t \left| \sum_{j=1}^n (r_{jt} - r_j)x_j \right| \quad (3.9)$$

où  $r_j = \sum_{t=1}^T \wp_t r_{jt}$  est la valeur espérée de  $R_j$ .

Le modèle de Mean-Absolute Deviation (MAD) est comme suit

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^n r_j x_j : W\left[\sum_{j=1}^n R_j x_j\right] \leq wM, \sum_{j=1}^n x_j = M, 0 \leq x_j \leq \alpha_j, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (3.10)$$

Ce modèle peut s'écrire sous la forme d'un modèle de programmation linéaire.

Konno et Yamazaki déclarent que le modèle MAD est plus crédible que MV ([33],[59],[125]). Leurs arguments sont les suivants :

1. Dans la formulation de MAD nous n'avons pas besoin de la matrice de Variance-Covariance.
2. MAD est un modèle de programmation linéaire alors que MV est un programme quadratique. Les programmes linéaires sont moins coûteux que ceux de quadratiques surtout pour les problèmes de grandes tailles.
3. Les portefeuilles efficients fournis par MAD ont moins d'actifs que ceux de MV. Cette propriété est un avantage quand il y a des coûts de transactions.
4. Le modèle MAD est compatible avec la dominance stochastique en deuxième ordre quelle que soit la distribution des rendements mais nous savons que, en général, le modèle MV n'est pas compatible avec la dominance stochastique.

SIMAAN [160] a publié un article sur les avantages et les inconvénients du modèle MAD. Il a démontré qu'en éliminant la matrice de variance-covariance le modèle MAD surestime les risques, par conséquent, il élimine certains profits.

### 3.3.4 Value at risk (VaR) et Value at Risk Conditionnel (CVaR)

Récemment, une mesure de risque est de plus en plus utilisée dans les établissements financiers ([34],[52],[65], [118]). Cette mesure de risque est nommée *Valeur exposée au risque* ou *risque potentiel de perte* ou bien plus connue sous le nom *Value at Risk* ( $VaR_\beta$ ).  $VaR_\beta$  désigne la perte potentielle que nous nous autorisons sur un certain horizon  $T$  et pour un niveau de probabilité  $\beta$  donné. Plus précisément, pour un niveau de confiance  $100\beta\%$  où  $\beta \in (0, 1)$ , nous définissons  $VaR_\beta$  comme la plus petite perte possible qui est inférieure ou égale à  $100(1 - \beta)\%$  sur l'horizon  $T$ .



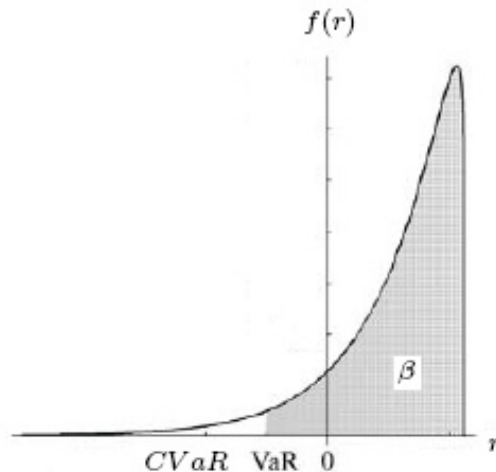


FIGURE 3.2 – VaR et CVaR en  $\beta\%$  de confiance et la fonction de densité  $f$

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , définissons  $L(x) \in \mathbb{R}^n$  la variable aléatoire qui représente la perte. Soit  $\Psi_L(x, \zeta)$  la fonction de répartition de  $L(x)$ , alors

$$\Psi_L(x, \zeta) = P(L(x) \leq \zeta).$$

Pour une variable  $x$ , Value at Risk en  $100\beta\%$  de confiance se définit par

$$VaR_\beta(x) = \inf\{\zeta \mid \Psi_L(x, \zeta) \geq \beta\}.$$

Une alternative à VaR est CVaR qui n'est pas aussi populaire que VaR. Pourtant, CVaR possède certaines propriétés qui la rendent plus logique que VaR ([34],[63]). CVaR est compatible avec la cohérence dont nous avons discuté [1]. Dans ce qui suit, nous présentons d'abord une définition mathématique pour CVaR.

Soit  $T_\beta(x)$  la variable aléatoire qui correspond à la  $\beta$ -queue de la perte  $L(x)$ . Nous munissons la variable  $T_\beta(x)$  par la distribution

$$\Psi_{T_\beta}(x, \zeta) = \begin{cases} 0 & : \zeta < VaR_\beta(x), \\ \frac{\Psi_L(x, \zeta) - \beta}{1 - \beta} & : \zeta \geq VaR_\beta(x). \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour une variable de décision  $x$ , le Value at Risk Conditionnel en  $100\beta\%$  de confiance est l'espérance mathématiques de  $T_\beta(x)$  en prenant en compte la fonction de distribution définie ci-dessus :

$$CVaR_\beta(x) = E(T_\beta(x)).$$

VaR est facile à utiliser à condition que la distribution des données soit gaussienne, mais nous savons bien que ce n'est pas toujours le cas en pratique.

CVaR est une mesure de risque cohérente ([34] et les références incluses) mais VaR, en général, ne satisfait pas les propriétés de cohérence car VaR n'est pas sous-additif. Ce n'est très apprécié en général, car cela signifie que la diversification n'est pas respectée par VaR. Dans le cas où les rendements ont une distribution gaussienne, VaR est sous-additif. Pour *certaines cas* où la distribution est elliptique, VaR est sous-additif et cohérent ([34] et les références incluses).

### 3.4 La classification des mesures de risque

En général, nous pouvons répartir les différentes mesures de risque en deux groupes selon la perception que nous avons du risque [33]. Le premier groupe se compose des mesures de risque qui sont basées sur la notion de dispersion. Plus précisément, il existe un objectif, comme l'espérance de rendement, et nous mesurons le risque par les dispersions pondérées des résultats autour de l'objectif. Ces mesures de risque sont des mesures symétriques de risque. Ce sont les mesures qui pénalisent les écarts négatifs aussi bien que positifs. Deux des mesures les plus connues parmi les mesures symétriques sont le modèle MV de Markowitz et le modèle MAD de Konno et al. Le deuxième groupe est composé des mesures de risque qui considère le risque comme les écarts inférieurs à un objectif. Ce sont les mesures de baisse. L'objectif peut être défini avec consultation de l'investisseur (subjective) ou sans (objective). Ce type de mesure de risque se classifie comme les mesures asymétriques de risque. La semivariance proposée par Markowitz, Value at Risk (VaR) [118] et Conditional Value at Risk (CVaR) [148] sont comprises dans ce groupe.

#### 3.4.1 Une approche générale pour la représentation des mesures de risque

BAWA [9] et FISHBURN [31] ont développé un *modèle*  $\alpha - \tau$  afin de définir les mesures de baisse de façon générale. Leur modèle s'appelle *Lower Partial Moments (LPM)*. Soit  $r$  la variable aléatoire de rendement des actifs et  $f$  la fonction de densité de la distribution des rendements.

**Définition** : LPM de l'ordre  $\alpha$  et l'objectif  $\tau$  se définit comme la suite

$$LPM_{\tau,\alpha}(r) := \sum_{r \leq \tau} ([\tau - r]^\alpha) f(r) = E\{(max[0, \tau - r])^\alpha\} \quad , \alpha > 0. \quad (3.12)$$

L'introduction de LPM était un progrès considérable dans le domaine de risque car il fournit une représentation générale de risque.

Il existe une formulation encore plus générale. Bernell STONE [163] était la première personne qui a défini une mesure de risque à trois paramètres que nous allons nommer *Stone's*

*Risk Measure* ou plus simplement *SRM* :

$$SRM_{\tau,\alpha}(r) := \sum_{r \leq \gamma} ([\tau - r]^\alpha) f(r) \quad , \alpha \geq 0 \quad (3.13)$$

où  $\tau$  est l'objectif par rapport auquel les écarts sont mesurés.  $\alpha$  est le paramètre mesurant l'impact des écarts.  $\gamma$  est le paramètre avec lequel nous limitons le domaine où le risque est mesuré.

Nous pouvons rendre la plupart des mesures de risque sous la forme de SRM, que ce soit les mesures de risque symétrique ou asymétrique.

### **Les mesures symétriques de risque**

Nous considérons deux mesures de risque bien connues, c'est-à-dire MV et MAD. Puisque les rendements supérieurs à l'objectif sont aussi considérés comme faisant partie du risque alors les valeurs associées au risque peuvent fluctuer entre  $(-\infty, +\infty)$ . Nous posons  $\gamma = +\infty$ .

**MV** Le modèle MV de Markowitz est un cas particulier de SRM pour  $\tau := E(r) = \bar{r}$  et  $\alpha = 2$ , dans ce cas

$$\sigma^2 \equiv SRM_{\bar{r},2}(r) := \sum_r ([\bar{r} - r]^2) f(r) = E[(\bar{r} - r)^2]. \quad (3.14)$$

Dans le cas plus général où l'objectif n'est pas l'espérance de rendement du portefeuille, la représentation devient

$$SRM_{\tau,2}(r) := \sum_r ([\tau - r]^2) f(r) = E[(\tau - r)^2]. \quad (3.15)$$

**MAD** Soient  $\alpha = 1$  et  $\tau := E(r) = \bar{r}$ , alors la mesure de risque MAD se formule

$$MAD \equiv SRM_{\bar{r},1}(r) := \sum_r |\bar{r} - r|^1 f(r) = E[|\bar{r} - r|^1]. \quad (3.16)$$

### **Les mesures asymétriques de risque**

Nous pouvons démontrer que toutes les mesures asymétriques peuvent se voir comme un cas particulier de SRM [33].

**Semivariance** : Soit  $\alpha = 2$  et  $\gamma = \tau := E(r) = \bar{r}$  alors

$$\sigma^{-2} \equiv SRM_{\bar{r},2}(r) := \sum_{r \leq \bar{r}} ([\bar{r} - r]^2) f(r) = E\{(max[0, \bar{r} - r])^2\}. \quad (3.17)$$

**Risque de baisse** : Soit  $\gamma = \tau$  et  $\alpha = 2$  alors

$$SRM_{\tau,2}(r) := \sum_{r \leq \tau} ([\tau - r]^2) f(r) = E\{(max[0, \tau - r])^2\}. \quad (3.18)$$

**Value at Risk** : Soit  $VaR_\beta(r) = \theta$  alors il nous suffit de choisir  $\alpha = 0$  et  $\gamma = \tau = \theta$ , alors

$$SRM_{\theta,0}(r) := \sum_{r \leq \theta} ([\theta - r]^0) f(r) = E\{(max[0, \theta - r])^0\} = 1 - \beta. \quad (3.19)$$



# Chapitre 4

## Gestion de portefeuille sous les contraintes de seuil, de seuil d'achat et de cardinalité

---

*Résumé* Dans ce chapitre nous proposons une nouvelle approche continue basée sur la programmation DC et DCA pour la résolution des problèmes de gestion de portefeuille dont l'ensemble des solutions admissibles est non convexe. Ces problèmes sont des extensions du modèle de Markowitz pour les cas plus réalistes. Les extensions consistent à ajouter des contraintes de seuil d'achat, des contraintes de seuil et celles de cardinalité. La présence de ces contraintes rend le problème non convexe, par conséquent très difficile à résoudre par les méthodes classiques. La plupart des méthodes existantes pour résoudre ce problème sont basées sur des heuristiques. Dans ce travail, nous traitons ce problème par DCA via la pénalité exacte en nous basant sur les décompositions DC appropriées. Les simulations numériques sur plusieurs jeux de données empiriques montrent l'efficacité de notre approche par rapport aux méthodes standards.

---

### 4.1 Introduction

En ce qui concerne le problème de choix de portefeuille, étant donné un nombre d'actifs financiers et une somme à investir, nous devons choisir quelques actifs afin d'investir le capital [29]. Pour résoudre ce problème, Markowitz a présenté un modèle en 1952 [112], le modèle moyenne-variance (MV) c'est un modèle classique en planning de portefeuille. Markowitz a démontré que l'investisseur rationnel qui veut maximiser l'espérance d'utilité, choisit le portefeuille qui est optimal selon l'espérance de rendement et la variance. Il a défini un portefeuille non-dominé comme le portefeuille efficient s'il atteint le plus haut niveau de rendement espéré pour un niveau fixé de risque ou celui qui a le plus faible niveau de risque pour un niveau prévu de rendement. Afin de sélectionner tous les portefeuilles efficients parmi les autres, il nous faut résoudre un problème quadratique. Ce problème contient un paramètre, soit celui du niveau de risque autorisé, soit celui du niveau attendu de

rendement. Après avoir trouvé tous les portefeuilles efficaces, nous pouvons tracer la courbe des portefeuilles efficaces (la *frontière efficiente*), qui est une courbe lisse et croissante.

Le modèle MV est un modèle général qui ne couvre pas tous les besoins du monde réel ([16],[29],[51]). Parfois, dans les situations réelles, nous devons respecter certaines contraintes d'investissements. Par exemple :

- (a) **Contraintes de seuil d'achat** : Ce sont des contraintes qui nous empêchent d'avoir de très petits investissements dans les actifs [7].
- (b) **Contraintes de cardinalité** : Ce sont des contraintes qui nous obligent à choisir un nombre limité d'actifs parmi les actifs disponibles [29].
- (c) **Contraintes de seuil** : Ces contraintes sont les généralisations des contraintes de seuil d'achat où les ventes-à-découverte sont autorisées [7].

La présence de ces contraintes rend le problème non convexe et par conséquent très difficile à résoudre. En fait, tous les cas peuvent se formuler dans un contexte de programmation en variables mixtes. Les contraintes de seuil d'achat et de cardinalité ont été largement étudiées ([16],[29],[51]). La plupart des méthodes utilisées sont basées sur des heuristiques. Récemment, une méthode appelée *Direct* a été utilisée pour résoudre les problèmes qui contiennent les contraintes de seuil d'achat ([7],[8]). Cette méthode souffre de manque de preuve de convergence. Nous pouvons seulement fixer une limite sur le nombre d'itération de l'algorithme. La méthode *Direct* peut être également utilisée pour résoudre le problème sous les contraintes de seuil. Les contraintes de seuil n'ont pas été bien étudiées dans la littérature financière. La cause est peut-être la non-convexité du modèle et plus particulièrement la présence des contraintes de complémentarité (voir [55]).

Le but de ce chapitre est de présenter une méthode basée sur la programmation DC et DCA afin de résoudre ces problèmes. La méthode consiste à reformuler les modèles dans le contexte de programmation DC via la pénalité exacte en nous basant sur les décompositions DC appropriées. Plus particulièrement, nous allons introduire une nouvelle fonction de pénalité qui prend en considération, non seulement les variables binaires mais aussi les contraintes de complémentarité. Pour chaque contrainte (cardinalité, seuil d'achat ou seuil), le modèle généralisé est résolu par un algorithme par séparation et évaluation (SE) et/ou une méthode combiné de SE et DCA.

Le reste du chapitre est organisé de façon suivante : dans la deuxième section, nous présentons la description et la formulation du modèle MV. La section 4.3 donne une description du modèle MV en prenant en compte les contraintes de seuil d'achat. La section 4.4 décrit la résolution du modèle MV en présence des contraintes de cardinalité. Un cas plus général du modèle MV avec contraintes de seuil d'achat, c'est-à-dire les contraintes de seuil, est étudié en section 4.5. Nous terminons ce chapitre par une discussion sur les résultats et une conclusion.

## 4.2 Le modèle moyenne-variance (MV)

Dans le premier temps, en introduisant les notations que nous utiliserons au cours ce chapitre, nous rappelons le modèle MV de Markowitz.

Supposons qu'une liste des rendements historiques soit disponible. La liste contient les rendements historiques de  $n$  actifs pendant  $m$  périodes. A partir de cette liste nous définissons le rendement moyen de chaque actif en utilisant la formule suivante

$$r_i := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{ij}$$

où  $r_{ij}$  est le rendement de l'actif  $i$  en période  $j$  tel que  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, m$ .

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , les pondérations de  $n$  actifs sous risque (risqué) qui forment les portefeuilles. En fait,  $x_i$  est la variable de décision qui représente la proportion du capital investie en actif  $i$ . De plus nous supposons que  $x_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  et les variables  $x_i$  correspondent aux rendements  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^t$ . Le rendement du portefeuille  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$  est calculé par  $R = \mathbf{x}^t \mathbf{r}$  et le risque dédié au portefeuille est défini par  $\sigma^2 = \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x}$ .  $\mathbf{Q}$  est la matrice de Variance-Covariance dont l'élément  $(i, j)$  est calculé par

$$\sigma_{i,j} := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (r_{ik} - r_i)(r_{jk} - r_j). \quad (4.1)$$

En fait,  $\sigma_{i,j}$  représente la covariance entre les actifs  $i$  et  $j$ . Pour le cas où  $i = j$ , la formule (4.1) définit la variance de l'actif  $i$ . En utilisant ces notations, le modèle MV de Markowitz se résume (voir [7]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ s.c. \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n r_j x_j = R, \\ \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Dans ce modèle,  $R$ , le rendement espéré du portefeuille, est un paramètre fixé par l'investisseur. Puisque  $0 \leq x_i \leq 1$ , alors  $R$  peut varier entre ' $\min_j r_j$ ' et ' $\max_j r_j$ '. La contrainte  $\sum_{j=1}^n r_j x_j = R$  peut être remplacée par  $\sum_{j=1}^n r_j x_j \geq R$ , qui présente la préférence de l'investisseur à avoir un gain supérieur ou égal à  $R$ .

Le modèle MV est un modèle de programmation quadratique qui peut être résolu de façon très efficace. Pourtant, si nous ajoutons les contraintes de seuil d'achat ou de cardinalité le nouveau modèle ne sera plus facile à résoudre. Les sections suivantes sont consacrées à reformuler et à résoudre les nouveaux modèles par DCA.

### 4.3 Contraintes de seuil d'achat

Afin d'introduire les contraintes de seuil d'achat dans le modèle MV, nous définissons  $a_j, b_j$  comme les bornes inférieure et supérieure sur la proportion du capital investi dans l'actif  $j$ , respectivement. Il faut vérifier  $a_j > 0$ . Le modèle MV en présence des contraintes de seuil d'achat est donc :

$$\begin{aligned}
 (P1) : \quad & \min \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
 & \text{s.c.} \\
 & \sum_{j=1}^n r_j x_j = R, \\
 & \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\
 & x_j \in \{0\} \cup [a_j, b_j] \quad : j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

A cause des contraintes 4.3, le problème (P1) est non convexe.

#### 4.3.1 Programmation DC et DCA pour la résolution du problème

##### 4.3.1.1 Reformulation

Le problème (P1) peut être reformulé en tant qu'un modèle de programmation binaire. Soit  $z_j, j = 1, \dots, n$ , des variables binaires telles que :

$$z_j = \begin{cases} 1, & x_j \in [a_j, b_j], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.4}$$

Avec l'introduction des nouvelles variables, le modèle (P1) se met sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
 (P2) : \quad & \min \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
 & \text{s.c.} \\
 & \sum_{j=1}^n r_j x_j = R, \\
 & \sum_{j=1}^n x_j = 1, \\
 & a_j z_j \leq x_j \leq b_j z_j \quad : j = 1, \dots, n, \\
 & z_j \in \{0, 1\} \quad : j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$



Soit  $\mathcal{A}$  le polyèdre convexe borné et non vide défini par :

$$\mathcal{A} := \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times [0, 1]^n : \sum_{j=1}^n r_j x_j = R, \sum_{j=1}^n x_j = 1, a_j z_j \leq x_j \leq b_j z_j, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Alors (P2) s'écrit

$$\min \{ \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} : (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}, z_j \in \{0, 1\} : j = 1, \dots, n \}. \quad (4.5)$$

Considérons la fonction  $p$  définie par

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) := \sum_{i=1}^n z_i (1 - z_i). \quad (4.6)$$

Clairement, la fonction  $p$  est concave et finie sur  $\mathcal{A}$ , de plus  $p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \geq 0$  pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}$ , et

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} : \mathbf{z} \in \{0, 1\}^n\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} : p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 0\}.$$

Par conséquent (4.5) peut être réécrite

$$\min \{ \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} : (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}, p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 0 \}. \quad (4.7)$$

A partir du théorème 4.1, ci-dessous, nous obtenons, pour un nombre positif et suffisamment grand comme  $t$  ( tel que  $t \geq t_0$ ), un problème de minimisation convexe-concave qui est équivalent à (P2) :

$$(P2 - DC) : \quad \min \{ \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + tp(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \}. \quad (4.8)$$

**Théorème 4.1** ([105]) *Soient  $\mathbb{K}$  un polyèdre convexe borné et non vide,  $f$  une fonction finie convexe sur  $\mathbb{K}$  et  $p$  une fonction finie concave non négative sur  $\mathbb{K}$ . Il existe  $t_0 \geq 0$  tel que pour tout  $t \geq t_0$ , deux problèmes ci-dessous sont équivalents :*

$$(P_t) \quad \alpha(t) = \inf \{ f(x) + tp(x) : x \in \mathbb{K} \},$$

$$(P) \quad \alpha = \inf \{ f(x) : x \in \mathbb{K}, p(x) \leq 0 \}.$$

*Précisément, si l'ensemble de sommet de  $\mathbb{K}$ , dénoté par  $V(\mathbb{K})$ , est contenu dans  $\{x \in \mathbb{K}, p(x) \leq 0\}$ , alors  $t_0 = 0$ , sinon  $t_0 = \min \left\{ \frac{f(x) - \alpha(0)}{S} : x \in \mathbb{K}, p(x) \leq 0 \right\}$ , où  $S := \min \{ p(x) : x \in V(\mathbb{K}), p(x) > 0 \} > 0$ .*

Il est clair que  $\mathcal{A}$  est un polyèdre convexe, non vide et borné dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Alors, (P2) peut s'exprimer sous la formule de (P2 - DC).

### 4.3.1.2 Résolution de $(P2 - DC)$ par DCA

D'abord, on constate que  $(P2 - DC)$  est un problème de minimisation d'une fonction qui est convexe par rapport à  $\mathbf{x}$  et concave par rapport à  $\mathbf{z}$ , alors la fonction objectif du modèle  $(P2 - DC)$  est une fonction DC.

Soit  $\chi_{\mathcal{A}}$  la fonction indicatrice sur  $\mathcal{A}$ , i.e.,  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$  si  $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}$ ,  $+\infty$  sinon. Soient  $g$  et  $h$  les fonctions définies par

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + \chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad \text{et} \quad h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = -t \sum_{i=1}^n z_i (1 - z_i). \quad (4.9)$$

Par conséquent,  $g$  et  $h$  sont des fonctions convexes et le problème  $(P2 - DC)$  est un problème de programmation DC sous la forme

$$\min \{g(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}. \quad (4.10)$$

Selon la description générale de DCA, la résolution de  $(P2 - DC)$  via la formulation (4.10) par DCA consiste en la détermination de deux suites

$$(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \in \partial h(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k) \quad \text{et} \quad (\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k).$$

La fonction  $h$  est différentiable et son gradient au point  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)$  est calculé de la manière suivante :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \partial h(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} = t(2\mathbf{z} - \mathbf{1}). \quad (4.11)$$

Le calcul de  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$  se ramène à la résolution du problème suivant :

$$\min \{ \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} - \langle (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k), (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \rangle : (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \}. \quad (4.12)$$

#### Algorithme 4.1 Schéma de DCA

##### **Initialisation :**

- Choisir  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  et  $k = 0$ .
- Choisir la tolérance  $\epsilon$  positive suffisamment petite.

##### **Répéter**

- Calculer  $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \in \partial h(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)$  via (4.11).
- Calculer  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)$  en résolvant le programme quadratique (4.12).
- $k + 1 \leftarrow k$ .

**Jusqu'à**  $\|(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) - (\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)\| \leq \epsilon$ .

La convergence de l'algorithme 4.1 est donnée par le prochain théorème ([91, 94, 139]).

#### **Théorème 4.2** (Propriétés de la convergence de l'algorithme 4.1)

(i) L'algorithme 4.1 génère une suite  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)\}$  tel que la suite  $\{(\mathbf{x}^k)^t \mathbf{Q} \mathbf{x}^k + t p(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)\}$  est décroissante.

- (ii) Il existe un nombre non négatif  $t$  tel que pour chaque  $t \geq t_0$  la suite  $\{p(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)\}$  est décroissante. En particulier, si  $(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r)$  est une solution admissible de (P2) alors  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)$ , pour tout  $k \geq r$ , est admissible également.
- (iii) DCA a un taux de convergence linéaire pour le problème (P2 – DC).
- (iv) La suite  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)\}$  converge à  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$  où le point  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$  est un point critique du problème (P2 – DC).

**Preuve :** (i), (iii) et (iv) sont des conséquences immédiates du théorème de la convergence de DCA pour une programmation DC générale (voir [87, 94, 139, 140]).

(ii) Soit  $\mathcal{V}(\mathcal{A})$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{V}(\mathcal{A})$  est contenu dans l'ensemble des solutions admissibles de (P2) alors l'affirmation est triviale avec  $t_0 = 0$ . Sinon, posons

$$\xi := \min\{p(\mathbf{x}', \mathbf{z}') - p(\mathbf{x}, \mathbf{z}) : ((\mathbf{x}, \mathbf{z}), (\mathbf{x}', \mathbf{z}')) \in \mathcal{V}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V}(\mathcal{A}), p(\mathbf{x}', \mathbf{z}') > p(\mathbf{x}, \mathbf{z})\},$$

$$\eta := \max\{\mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x}' - \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} : ((\mathbf{x}, \mathbf{z}), (\mathbf{x}', \mathbf{z}')) \in \mathcal{V}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V}(\mathcal{A})\}$$

donc  $0 < \xi < +\infty$  et  $0 \leq \eta < +\infty$  car l'ensemble  $\mathcal{V}(\mathcal{A})$  est fini. Considérons maintenant le nombre non négatif  $t_0$  défini par  $t_0 := \frac{\eta}{\xi}$  et  $t > t_0$ . Soit  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)\}$  un ensemble généré par **Algorithme 4.1** appliqué au (P2 – DC) à partir de cette valeur  $t$ . Supposons qu'il existe  $r \geq 1$  tel que  $p(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) > p(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r)$ . Puisque  $t > t_0$  alors

$$t[p(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) - p(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r)] > t_0[p(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) - p(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r)]$$

ou

$$t[p(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) - p(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r)] > \frac{\eta}{\xi}[p(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) - p(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r)].$$

Par la définition de  $\xi$ ,

$$\xi \geq p(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) - p(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r),$$

alors

$$t[p(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) - p(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r)] > \eta$$

en prenant en compte la définition de  $\eta$ , nous avons

$$t[p(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) - p(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r)] > \mathbf{x}^{r,t} \mathbf{Q} \mathbf{x}^r - \mathbf{x}^{r+1,t} \mathbf{Q} \mathbf{x}^{r+1}$$

i.e.

$$\mathbf{x}^{r+1,t} \mathbf{Q} \mathbf{x}^{r+1} + tp(\mathbf{x}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) \geq \mathbf{x}^{r,t} \mathbf{Q} \mathbf{x}^r + tp(\mathbf{x}^r, \mathbf{z}^r),$$

ce qui contredit la décroissance de la suite  $\mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} + tp(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ . □

### 4.3.1.3 Résolution globale

Pour trouver la solution globale du problème de choix de portefeuille sous les contraintes de seuil d'achat et ainsi afin de comparer les résultats obtenus par DCA, nous avons utilisé deux algorithmes par Séparation et Évaluation (SE) afin de résoudre le problème.

Le premier algorithme par SE s'applique au modèle ( $P1$ ) de façon que pour calculer la borne inférieure les contraintes de seuil d'achat sont relaxées, autrement dit, les contraintes 4.3 sont remplacées par  $x_j \in [0, b_j], j = 1, \dots, n$ . Le résultat de ce remplacement est un modèle de programmation quadratique qui se résout facilement. La borne supérieure est mise à jour si l'on trouve une meilleure solution pour le modèle ( $P1$ ). La séparation est effectuée sur une variable comme  $x_j \in ]0, a_j[$  pour que nous ayons soit  $x_j = 0$ , soit  $a_j \leq x_j \leq b_j$ .

Le deuxième algorithme par SE est utilisé sur le modèle ( $P2$ ), où la borne inférieure est calculée en relaxant les contraintes binaires par celles linéaires, autrement dit les contraintes  $z_j \in \{0, 1\}$  sont remplacées par  $0 \leq z_j \leq 1$ . La borne supérieure est mise à jour si nous trouvons une meilleure solution pour le modèle ( $P2$ ). La séparation est effectuée sur la variable fractionnelle  $z_j$  telle que soit  $z_j = 0$ , soit  $z_j = 1$ .

### 4.3.1.4 Expériences numériques

Les algorithmes ont été codés avec le langage C++ et exécutés sur un ordinateur Pentium de 1.6GHz, 512Mo RAM. Pour résoudre les programmes quadratiques, nous avons utilisé le logiciel CPLEX en version 9.1. Les tests ont été faits sur deux jeux de données qui avaient été utilisés dans les articles publiés par différents chercheurs ([16], [29], [51], [154]). Les données correspondent aux prix hebdomadaires de deux différents indices de Mars 1992 à Septembre 1997. Les indices sont de Dax 100 en Allemagne et de Nikkei 225 au Japon. Il y a 85 actifs pour le premier jeu de données et 225 actifs pour le deuxième. Les bornes inférieure et supérieure sur les investissements sont 0.05 et 1.0, respectivement. Le paramètre de pénalité,  $t$ , est égal à 0.01 pour le premier jeu de données et 0.02 pour le deuxième.  $\epsilon = 10^{-7}$  et les tests ont été effectués pour différentes valeurs de  $R$ .

## Recherche d'un bon point initial pour DCA

Une question importante qui se pose est de choisir un bon point initial pour la méthode DCA. L'approche que nous avons adoptée consiste d'abord en la résolution du problème relaxé du modèle ( $P2$ ). Ensuite, certaines modifications ont été effectuées sur la solution du problème relaxé. Le processus de choix du point initial se résume ainsi :

1. **Résoudre le problème relaxé** : Nous résolvons le problème relaxé du ( $P2$ ) afin de trouver  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}})$ .
2. **Trouver une solution entière** : Si  $\tilde{z}_j$  est non nul, nous l'arrondissons à 1 pour obtenir  $(\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$  de  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{z}})$ .

En général, le nouveau point n'est plus une solution admissible du modèle  $(P2)$  ni pour le modèle  $(P2 - DC)$ , mais à partir de cette solution DCA trouve une solution admissible juste après une seule itération.

En effet, afin de trouver un bon point initial, nous avons tenté plusieurs choix :

- le point fourni par le processus expliqué ci-dessus ;
- la solution optimale du modèle relaxé de  $(P2)$  ;
- la solution optimale du problème suivant :

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n z_j(1 - z_j) : (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \right\}.$$

Le premier choix donne les meilleurs résultats.

Les tableaux 4.1 et 4.2, présentent les résultats. Dans ces tableaux, les valeurs optimales (Val. Opt.) fournies par DCA, par le premier algorithme SE (SE-1) et/ou par le deuxième algorithme SE (SE-2) ont été présentées. Ces tableaux montrent aussi le nombre d'itération (iter.) et le temps de résolution (CPU) en secondes.

Les résultats montrent l'efficacité et supériorité de DCA par rapport aux autres algorithmes. Car DCA donne des solutions de haute précision dans 2, 3 ou 4 itérations et en une ou deux secondes.

## 4.4 Contraintes de cardinalité

Nous allons étudier un cas général du modèle de Markowitz où nous acceptons que l'investisseur attend un rendement futur supérieur ou égale à  $R$ . Il existe des coûts de transaction et la vente est autorisée. Les coûts acceptés que l'investisseur doit payer au cours de ses transactions sont proportionnels aux valeurs d'achat et de vente [114]. Nous acceptons que l'investisseur soit actuellement dans une position précise et prêt à payer les coûts de transaction afin d'arriver à un portefeuille benchmark. De plus, le but de ce travail insiste essentiellement sur la présence d'une contrainte qui rend le modèle plus réaliste. Cette contrainte est nommée, dans la littérature financière, *contrainte de cardinalité*. Elle a pour l'objectif de limiter le nombre d'actifs composant le portefeuille optimal. Afin d'introduire toutes les notions qui viennent d'être citées dans le modèle MV, nous acceptons les notations supplémentaires suivantes, soient :

- $\mathbf{c}_b, \mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^n$  sont les vecteurs qui représentent les coûts de transaction pour les achats et pour les ventes, respectivement ;
- $\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s$  correspondent aux variables d'achat et de vente ;
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur qui représente la position actuelle de l'investisseur ;
- $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur du portefeuille benchmark ;
- $\mathbf{z}$  est le vecteur des variables binaires,  $z_i = 1$  montre que l'actif  $i$  est inclus dans le portefeuille et 0 sinon ;

R	DCA			Séparation et Évaluation				
	Val. Opt.	iter	CPU	Val. Opt.	iter(SE1)	CPU(SE1)	iter(SE2)	CPU(SE2)
0.0001	0.000186	2	0.235	0.000174	1348	147.953	1018	97.734
0.0002	0.000189	2	0.234	0.000170	718	77.343	559	54.907
0.0003	0.000193	2	0.218	0.000167	491	53.328	373	36.688
0.0004	0.000182	3	0.266	0.000164	549	59.313	406	39.078
0.0005	0.000174	3	0.266	0.000162	671	72.625	519	49.750
0.0006	0.000173	4	0.312	0.000159	788	86.500	579	55.344
0.0007	0.000170	4	0.313	0.000158	1475	158.547	1161	111.750
0.0008	0.000167	3	0.266	0.000156	1648	175.828	959	91.937
0.0009	0.000167	4	0.313	0.000154	1838	194.860	1004	96.422
0.001	0.000167	4	0.312	0.000153	1980	209.610	1207	114.563
0.002	0.000156	2	0.219	0.000141	204	22.062	161	15.359
0.003	0.000159	2	0.234	0.000147	140	15.875	126	12.266
0.004	0.000207	2	0.203	0.000170	129	14.406	98	9.766

TABLE 4.1 – La performance de l'algorithme pour le premier jeu de données en utilisant deux algorithmes par SE

R	DCA			Séparation et Évaluation (SE2)		
	Val. Opt.	iter	CPU	Val. Opt.	iter	CPU
0.00001	0.000306	2	1.594	0.000305	12	10.953
0.00002	0.000306	2	1.609	0.000305	13	10.656
0.00003	0.000306	2	1.594	0.000305	12	10.516
0.00004	0.000306	2	1.625	0.000305	12	11.703
0.00005	0.000306	2	1.609	0.000305	13	11.610
0.00006	0.000306	2	1.578	0.000305	13	11.547
0.00007	0.000306	2	1.610	0.000305	13	11.672
0.00008	0.000306	2	1.594	0.000305	13	11.813
0.00009	0.000306	2	1.609	0.000305	13	11.813
0.0001	0.000306	2	1.703	0.000305	13	11.890
0.0002	0.000305	2	1.750	0.000305	14	13.110
0.0003	0.000307	2	1.719	0.000306	14	13.110
0.0004	0.000310	2	1.781	0.000308	16	15.407
0.0005	0.000311	2	1.735	0.000310	24	22.844
0.0006	0.000314	2	1.719	0.000312	15	14.250
0.0007	0.000316	2	1.719	0.000315	15	14.328
0.0008	0.000322	2	1.781	0.000319	32	30.563
0.0009	0.000324	2	1.687	0.000322	32	30.563
0.001	0.000328	2	1.781	0.000326	30	29.265
0.002	0.000391	2	1.828	0.000390	12	12.140
0.003	0.000519	2	1.953	0.000517	11	11.657

TABLE 4.2 – La performance de l’algorithme pour le deuxième jeu de données en utilisant l’algorithme par SE (le deuxième)

- $a_i, b_i$  sont les paramètres concernant les bornes inférieure et supérieure ;
- $card$  est le paramètre de cardinalité qui montre *le nombre* souhaité d'actifs composant le portefeuille.

En utilisant ces notations, le modèle s'écrit

$(P_{card}) :$

$$\min (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$$

s.c.

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{r} - (\mathbf{c}_b^t \mathbf{x}_b + \mathbf{c}_s^t \mathbf{x}_s) \geq R, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{p} + \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_s = \mathbf{x}, \quad (4.14)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad (4.15)$$

$$\sum_{j=1}^n z_j = card, \quad (4.16)$$

$$a_j z_j \leq x_j \leq b_j z_j \quad : j = 1, \dots, n, \quad (4.17)$$

$$z_j \in \{0, 1\} \quad : j = 1, \dots, n, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s \geq \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

La contrainte 4.14 montre le passage de l'investisseur de la position actuelle  $\mathbf{p}$  au portefeuille composé du vecteur  $\mathbf{x}$  en achetant  $\mathbf{x}_b$  et vendant  $\mathbf{x}_s$ . La contrainte 4.13 indique le rendement du portefeuille après avoir payé les coûts de transaction. Les contraintes 4.16, 4.17 et 4.18 concernent la modélisation de la contrainte de cardinalité. En effet, c'est la contrainte de cardinalité qui rend le problème difficile à résoudre. A cause de la présence des variables binaires, le problème  $(P_{card})$  est non convexe. Plusieurs alternatives du modèle de Markowitz avec la contrainte de cardinalité ont été étudiées et ont été résolues. La plupart des méthodes utilisées sont basées sur des heuristiques ([16, 29, 51]). Dans ce travail, la méthode utilisée est basée sur la programmation DC et DCA.

## 4.4.1 Programmation DC et DCA pour la résolution du problème

### 4.4.1.1 Reformulation

Le problème  $(P_{card})$  peut être mis sous forme de programmation DC. Soit  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{3n} \times [0, 1]^n$  le polyèdre convexe borné et non vide défini par les contraintes 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17 et 4.19. Le problème  $(P_{card})$  s'écrit

$$\min \{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}, z_j \in \{0, 1\} : j = 1, \dots, n \}. \quad (4.20)$$



Considérons la fonction  $p$  définie par

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) := \sum_{i=1}^n z_i(1 - z_i). \quad (4.21)$$

La fonction  $p$  est une fonction concave et finie sur  $\mathcal{A}$ , de plus  $p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \geq 0$  pour tout  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}$ , et

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} : \mathbf{z} \in \{0, 1\}^n\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} : p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \leq 0\}.$$

Par conséquent (4.20) peut être réécrite ainsi

$$\min \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}, p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \leq 0\}. \quad (4.22)$$

D'après le théorème 4.1, il existe un nombre suffisamment grand  $t_0$  tel que, pour tout  $t$  satisfaisant ( $t \geq t_0$ ), le problème suivant soit équivalent à  $(P_{card})$  :

$$(P_{card} - DC) : \min \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + tp(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}\}. \quad (4.23)$$

#### 4.4.1.2 Résolution de $(P_{card} - DC)$ par DCA

Le modèle  $(P_{card} - DC)$  est un problème de minimisation d'une fonction est convexe par rapport à  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s$  et concave par rapport à  $\mathbf{z}$ , alors la fonction objectif du modèle  $(P_{card} - DC)$  est une fonction DC.

Une décomposition naturelle de la fonction objectif du modèle  $(P_{card} - DC)$ , à l'aide des fonctions  $g$  et  $h$  est

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \quad \text{et} \quad h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) = -t \sum_{i=1}^n z_i(1 - z_i) \quad (4.24)$$

où  $\chi_{\mathcal{A}}$  est la fonction indicatrice sur  $\mathcal{A}$ , i.e.,  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) = 0$  si  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}$ ,  $+\infty$  sinon.

En bref, le problème  $(P_{card} - DC)$  est un programme DC sous la forme

$$\min \{g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) - h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{4n}\} \quad (4.25)$$

pour lequel les fonctions  $g$  et  $h$  sont définies ci-dessus.

Selon la description de DCA, la résolution de  $(P_{card} - DC)$  via la formulation (4.25) par DCA consiste à construire deux suites

$$(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}_b^k, \mathbf{u}_s^k, \mathbf{v}^k) \in \partial h(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k) \quad \text{et} \quad (\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}_b^{k+1}, \mathbf{x}_s^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}_b^k, \mathbf{u}_s^k, \mathbf{v}^k).$$

La fonction  $h$  est différentiable et son gradient au point  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k)$  est calculé de façon suivante

$$(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}_b^k, \mathbf{u}_s^k, \mathbf{v}^k) \in \partial h(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k) \iff \mathbf{u}^k = \mathbf{u}_b^k = \mathbf{u}_s^k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^k = t(2\mathbf{z}^k - \mathbf{1}). \quad (4.26)$$

Le calcul de  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}_b^{k+1}, \mathbf{x}_s^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}_b^k, \mathbf{u}_s^k, \mathbf{v}^k)$  se ramène à la résolution du problème suivant

$$\min \left\{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - \langle (\mathbf{u}^k, \mathbf{u}_b^k, \mathbf{u}_s^k, \mathbf{v}^k), (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \right\}. \quad (4.27)$$

#### Algorithme 4.2 Schéma de DCA

##### Initialisation :

- Choisir  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_b^0, \mathbf{x}_s^0, \mathbf{z}^0) \in \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^n$  et  $k = 0$ .
- Choisir la tolérance  $\epsilon$  positive suffisamment petite.

##### Répéter

- Calculer  $(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}_b^k, \mathbf{u}_s^k, \mathbf{v}^k) \in \partial h(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k)$  via (4.26).
- Calculer  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}_b^{k+1}, \mathbf{x}_s^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}_b^k, \mathbf{u}_s^k, \mathbf{v}^k)$  en résolvant le programme quadratique (4.27).
- $k + 1 \leftarrow k$ .

**Jusqu'à**  $\|(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}_b^{k+1}, \mathbf{x}_s^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) - (\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k)\| \leq \epsilon$ .

Le théorème de convergence de l'algorithme 4.2 se résume à l'aide du théorème suivant dont la démonstration n'est pas donnée à cause de sa ressemblance au théorème 4.2 (voir aussi [91, 94, 139]).

#### Théorème 4.3 (Propriétés de la convergence de l'algorithme 4.2)

- (i) L'algorithme 4.2 génère une suite  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k)\}$  telle que la suite  $(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{Q}(\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}) + tp(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k)$  est décroissante.
- (ii) Il existe un nombre non négatif  $t$  tel que pour chaque  $t \geq t_0$  la suite  $\{p(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k)\}$  est décroissante. En particulier, si  $(\mathbf{x}^r, \mathbf{x}_b^r, \mathbf{x}_s^r, \mathbf{z}^r)$  est une solution admissible de  $(P_{card})$  alors  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k)$ , pour tout  $k \geq r$ , est admissible également.
- (iii) DCA a un taux de convergence linéaire pour le problème  $(P_{card} - DC)$ .
- (iv) La suite  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}_b^k, \mathbf{x}_s^k, \mathbf{z}^k)\}$  converge à  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_b^*, \mathbf{x}_s^*, \mathbf{z}^*)$  où le point  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_b^*, \mathbf{x}_s^*, \mathbf{z}^*)$  est un point critique du problème  $(P_{card} - DC)$ .

#### 4.4.1.3 Résolution globale

Afin de trouver la solution globale du problème  $(P_{card})$  et de vérifier la qualité des résultats obtenus par DCA, nous avons utilisé un algorithme par Séparation et Évaluation (SE) et le logiciel CPLEX afin de résoudre le problème. Enfin, une méthode combinée de DCA et l'algorithme par SE a été développée. L'algorithme par SE calcule les bornes inférieures en remplaçant les contraintes binaires  $z_j \in \{0, 1\}$  par  $0 \leq z_j \leq 1$ . La borne supérieure est mise à jour si nous trouvons une meilleure solution pour le modèle  $(P_{card})$ . A chaque itération nous choisissons une variable fractionnelle comme  $z_j$  et la séparation est effectuée sur cette variable telle que soit  $z_j = 0$ , soit  $z_j = 1$ .

La philosophie des méthodes combinées est essentiellement basée sur l'utilisation de DCA afin de trouver une solution, éventuellement, améliorant la borne supérieure. De cette manière,

l'algorithme va effacer plus de sous-problèmes qui ne possèdent pas de solution globale. Cette opération accélère la convergence de l'algorithme par SE.

### Le schéma de l'algorithme combiné :

A chaque itération de l'algorithme par SE, après avoir décidé de relancer la méthode DCA, nous continuons de la façon suivante

1. Construire le modèle DC.
2. Prendre la solution du sous-problème afin de résoudre le problème DC par DCA. Avant d'utiliser la solution, il faut arrondir toutes les variables binaires non nulles à 1.
3. Résoudre le problème DC par DCA.
4. Évaluer la solution fournie par DCA. Si la solution est meilleure que la meilleure solution actuelle alors faire une mise à jour de la borne supérieure et de la meilleure solution.
5. Continuer l'algorithme par SE.

Pour tous les algorithmes et les méthodes, la procédure s'arrête soit lorsque les bornes inférieure et supérieure sont suffisamment serrées (proches), soit le temps d'exécution dépasse une limite prévue. On relance DCA lorsque le nombre de composants 0-1 de variables binaires de la solution du sous-problème relaxé est suffisamment grand, par exemple supérieur ou égal à  $n/2$ .

#### 4.4.1.4 Expérience numériques

Les algorithmes ont été codés avec le langage C++ et exécutés sur un ordinateur Pentium de 3GHz et 1Go RAM. La version 10.1 du logiciel CPLEX a été utilisée afin de résoudre les sous-problèmes relaxés ainsi que le modèle  $P_{card}$ . Les tests ont été effectués sur un jeu de données qui avait été déjà utilisé dans les articles publiés par différents chercheurs ([16, 29, 51, 154]). Les données correspondent aux prix hebdomadaires des actifs financiers de Mars 1992 à Septembre 1997. Les actifs ont été choisis parmi l'indice Dax 100 en Allemagne. Le nombre des actifs est 85. Le paramètre de pénalité, i.e.,  $t$ , est égale à 2.0.  $\epsilon = 10^{-7}$  et les tests ont été faits sur différentes valeurs de  $card$ . Ce sont les valeurs pour lesquelles le problème  $P_{card}$  devient très difficile à résoudre. Les valeurs choisies sont : 5, 6, ..., 15. Pour les valeurs plus grandes, le problème est facile à résoudre. Les valeurs choisies pour les autres paramètres sont :

- $c_{b_j}, c_{s_j}$  : 0.1% de transaction (achat ou vente) ;
- $p_j = \mathbf{0}$  : nous supposons qu'il ne s'agit pas d'un re-balancement de portefeuille ;
- $\bar{x}_j = 1/n$  ;
- $a_j = 0.05$  : les bornes inférieures ;
- $b_j = 1.0$  : les bornes supérieures.

## Recherche d'un bon point initial pour DCA

La procédure suivante explique la manière par laquelle le point initial de DCA a été choisi :

1. **Résoudre le problème relaxé :** Nous résolvons le problème relaxé du ( $P_{card}$ ) afin de trouver  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}_b, \tilde{\mathbf{x}}_s, \tilde{\mathbf{z}})$ . Le problème relaxé se définit par la relaxation des contraintes binaires, i.e. les contraintes  $z_j \in \{0, 1\}$  sont remplacées par  $0 \leq z_j \leq 1$ .
2. **Trouver une solution entière :** Nous arrondissons les variables  $\tilde{\mathbf{z}}$  non nulles à 1 pour arriver de  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}_b, \tilde{\mathbf{x}}_s, \tilde{\mathbf{z}})$  à  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}}_b, \tilde{\mathbf{x}}_s, \hat{\mathbf{z}})$ .

En général, le nouveau point n'est plus une solution admissible du modèle ( $P_{card}$ ) ni pour le modèle ( $P_{card} - DC$ ). DCA trouve une solution admissible pour le modèle ( $P_{card} - DC$ ) après une seule itération. En cours des itérations suivantes, DCA va améliorer la solution.

En effet, afin de trouver un bon initial, nous avons testé plusieurs choix :

- le point fourni par le processus expliqué ci-dessus ;
- la solution optimale du modèle relaxé de ( $P_{card}$ ) ;
- la solution optimale du problème suivant

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n z_j(1 - z_j) : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \right\}.$$

La première procédure donne de meilleurs résultats.

Le tableau 4.3, présente les résultats pour les différentes valeurs de paramètre de cardinalité (*card*). Dans ce tableau, les valeurs optimales (Val. Opt.) fournies par DCA, par l'algorithme de SE (SE) et par la méthode combinée (SE-DCA) et par CPLEX ont été présentées. Le tableau présente aussi le nombre d'itération (*iter.*) de DCA, le temps de résolution (CPU) en secondes pour DCA, le nombre d'appel à la méthode DCA pendant la procédure de SE-DCA (*relance*). Le temps d'exécution de tous les autres algorithmes était limité à 1200 secondes.

Les résultats montrent que DCA donne de bons résultats. Ils sont encourageants et en fait c'est la raison pour laquelle nous avons combiné l'algorithme SE et DCA afin d'améliorer la performance de SE. A chaque itération de SE-DCA, si les conditions étaient favorables, nous avons relancé DCA. Le rôle de DCA est de trouver une meilleure solution.

La supériorité de la méthode combinée par rapport à SE classique est due à l'efficacité de DCA. Selon les résultats présentés au tableau l'algorithme classique par SE échoue pour la plupart des valeurs de *card*. A l'opposé, les résultats fournis par la méthode combinée peuvent être comparés avec ceux de CPLEX. Plus particulièrement, la méthode combinée fournit une meilleure solution que CPLEX pour *card* = 13.

card	DCA			CPU	SE-DCA			reance	CPLEX		SE	
	Val. Opt.	iter			Val. Opt.	iter			Val. Opt.	Val. Opt.	Val. Opt.	Val. Opt.
5	0.000114	4	0.343	0.000075	10000		744	0.000071	0.000088			
6	0.000078	4	0.344	0.000063	9429		530	0.000057	0.000072			
7	0.000072	4	0.360	0.000051	8128		451	0.000050	0.000063			
8	0.000060	4	0.375	0.000043	8678		592	0.000041	0.000054			
9	0.000056	4	0.344	0.000038	8440		580	0.000037	0.000052			
10	0.000101	4	0.359	0.000035	7894		515	0.000030	Échoué			
11	0.000068	4	0.360	0.000031	8324		567	0.000029	Échoué			
12	0.000083	4	0.344	0.000029	8403		581	0.000027	Échoué			
13	0.000050	4	0.359	0.000025	8434		583	0.000026	Échoué			
14	0.000041	4	0.375	0.000025	8382		581	0.000021	Échoué			
15	0.000038	4	0.359	0.000024	8338		573	0.000020	Échoué			

TABLE 4.3 – La performance des algorithmes pour les différentes valeurs de cardinalité

## 4.5 Contraintes de seuil

Dans la plupart des marchés boursiers, un investisseur peut vendre un actif qu'il ne possède pas. Ce procédé est nommé *vente-à-découvert*. La mécanique de vente-à-découvert dit que l'actif peut prendre une position négative. Dans ce qui suit, nous allons présenter une description générale de vente-à-découvert qui existe dans la littérature financière. Cette description est simplifiée et elle ne contient pas tous les aspects réels de vente-à-découvert comme l'existence de coûts de transaction [27].

Imaginez que chaque action d'une compagnie soit vendue au prix de 100\$ et un investisseur croit que cette action va valoir moins cher (par exemple 95\$) au bout d'une période (par exemple, un an). De plus, l'investisseur estime que la compagnie va payer 3\$ de dividende à la fin de la période. Si l'investisseur *achète* une action de cette compagnie, son investissement sera  $-100\$$  à la date 0. Au bout de la période, il aura  $+3\$$  de dividende et pourra vendre cette action au prix de  $+95\$$ . Alors, à la fin de période l'investisseur perdra 2\$. Clairement, aucun investisseur ne souhaite avoir de telles actions dans son portefeuille, voire il veut investir un montant négatif dans une telle action. La question est la condition d'avoir une telle possibilité. Comment pouvons-nous créer une telle situation ? Supposons qu'un courtier accepte la vente-à-découvert, alors l'investisseur peut vendre l'action, dont nous avons parlé, à 100\$. À la fin de la période, l'investisseur doit racheter l'action pour la rendre au courtier, de plus, il va payer le dividende au courtier. Alors, l'investisseur doit payer 95\$ pour racheter l'action et 3\$ pour le dividende ; soit, 2\$ de gain.

Afin de modéliser la vente-à-découvert, nous utilisons une définition alternative de la vente-à-découvert [27]. D'un point de vue, une vente-à-découvert consiste à considérer un capital potentiel équivalent au montant de la vente-à-découvert. Autrement dit, la vente-à-découvert est une source de capital hors de la richesse que l'investisseur possède. Alors, le capital total investi est la somme de la vente-à-découvert et de la richesse initiale (que l'investisseur investit hors de la vente-à-découvert). Notons  $x_j$  comme la portion du capital investi en actif  $j$ , si l'investissement est dû à la vente-à-découvert alors,  $x_j < 0$  sinon  $x_j \geq 0$ . D'après cette définition, nous devons avoir la contrainte  $\sum_{j=1}^n |x_j| = 1$ . En général, à la fin de la période d'investissement, l'investisseur doit payer certains coûts à propos de sa vente-à-découvert, mais ici nous n'allons pas prendre en compte l'existence d'un tel coût. Alors, le revenu total d'investissement est de  $\sum_{j=1}^n r_j x_j$  où, comme pour le modèle de Markowitz,  $r_j$  est le rendement moyen de l'actif  $j$ . Le modèle de Markowitz en présence de la vente-à-découvert se résume par

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} \\ & \text{s.c.} \\ & \sum_{j=1}^n r_j x_j = R, \\ & \sum_{j=1}^n |x_j| = 1. \end{aligned}$$

Après avoir formulé le modèle de Markowitz avec la vente-à-découvert, nous pouvons prendre en considération tout type de contraintes qui sont appliquées dans les situations réelles comme les contraintes de seuil ou bien les contraintes de cardinalité. Les contraintes de seuil (voir [7]) empêchent de très petits investissements dans chaque actif, que ce soit un actif concernant l'achat ou un actif concernant la vente-à-découvert. Dans ce travail, nous avons étudié un modèle qui contient ces deux types d'actifs. De plus, il existe des contraintes de seuil sur les investissements. Soient,  $a_j, b_j$  les bornes inférieure et supérieure sur l'investissement dans l'actif  $j$ , respectivement, telles que  $0 < a_j \leq b_j \leq 1$ . De la même manière, soient  $c_j, d_j$  les bornes supérieure et inférieure sur la vente-à-découvert dans l'actif  $j$ , respectivement, telles que  $-1 \leq c_j \leq d_j < 0$ . En utilisant ces notations, la généralisation du modèle de Markowitz, dans laquelle la vente-à-découvert est permise et dans laquelle des contraintes de seuil sont présentes, s'exprime par

$$\begin{aligned}
 & \min \mathbf{x}^t \mathbf{Q} \mathbf{x} \\
 & \text{s.c.} \\
 & \quad \sum_{j=1}^n r_j x_j = R, \\
 & \quad \sum_{j=1}^n |x_j| = 1, \\
 & \quad x_j \in \{0\} \cup [a_j, b_j] \cup [c_j, d_j] \quad : j = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Selon ce modèle, soit on n'investit pas dans l'actif  $j$ , i.e.  $x_j \in \{0\}$ , soit l'investissement est effectué dans la limite des bornes, i.e.  $x_j \in [a_j, b_j]$  s'il s'agit d'un achat et  $x_j \in [c_j, d_j]$  s'il s'agit d'une vente-à-découvert. Le modèle est non-convexe. Il y a des contraintes de seuil et une contrainte de valeur absolue. Avant de résoudre le programme, nous allons essayer de le reformuler.

### 4.5.1 Reformulation

Afin de pouvoir supprimer le signe de valeur absolue, nous introduisons deux vecteurs :  $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$  tels que

$$|x_j| = y_j - y'_j, \quad y_j y'_j = 0, \quad y_j \geq 0, y'_j \leq 0 : j = 1, \dots, n$$

où,  $y_j$  correspond aux achats et  $y'_j$  correspond aux ventes-à-découvert. Avec les nouvelles variables, nous avons

$$x_j = y_j + y'_j \quad : j = 1, \dots, n.$$

Le changement de variable exige l'introduction des contraintes de complémentarité. L'interprétation de ces contraintes est liée au fait que l'investisseur ne doit pas et ne peut pas acheter et vendre un titre simultanément.

$(P_{seuil}) :$

$$\min (\mathbf{y} + \mathbf{y}')^t \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \mathbf{y}')$$

s.c.

$$\sum_{j=1}^n r_j (y_j + y'_j) = R,$$

$$\sum_{j=1}^n (y_j - y'_j) = 1,$$

$$y_j \in \{0\} \cup [a_j, b_j] \quad : j = 1, \dots, n, \quad (4.29)$$

$$y'_j \in \{0\} \cup [c_j, d_j] \quad : j = 1, \dots, n, \quad (4.30)$$

$$y_j y'_j = 0 \quad : j = 1, \dots, n. \quad (4.31)$$

Essentiellement, la résolution d'un modèle avec les possibilités de vente ou de vente-à-découvert est difficile. Les contraintes de complémentarité sont les premières causes. D'un côté, l'élimination de ces contraintes va nous donner des portefeuilles qui franchissent cette règle, d'autre part ces contraintes posent des problèmes au niveau de la résolution efficace du modèle. Konno et al. [56] ont développé un algorithme par séparation et évaluation (SE) pour résoudre ce problème. Dans l'algorithme proposé, les bornes inférieures sont calculées en relaxant les contraintes de complémentarité et la séparation est effectuée sur la variable qui ne respecte pas ces contraintes. Pourtant, la résolution d'un problème par un algorithme de SE n'est pas toujours promettant, surtout lorsqu'il s'agit d'un problème de grande taille. En raison de difficultés qui existent en résolution des problèmes avec les possibilité de vente-à-découvert, ils n'ont pas été bien étudiés dans la littérature financière ([55, 56]). On trouve rarement des travaux dans lesquels un modèle de portefeuille avec la vente-à-découvert soit étudié en acceptant et respectant tous ses aspects théoriques et logiques. En général, les contraintes de complémentarité sont supprimées ([55, 56]). Dans ce travail nous proposons une fonction de pénalité qui remplace les contraintes de seuil et celles de complémentarité. Après avoir utilisé un résultat de pénalité exacte, nous mettons le modèle sous la forme d'un programme DC. Ensuite DCA s'applique pour résoudre le problème DC. Un algorithme par séparation et évaluation, ainsi qu'une méthode combinée de SE et DCA pour résoudre le modèle de façon efficace et globale est proposée. D'abord, nous allons reformuler le modèle  $(P_{seuil})$  sous forme d'un programme binaire. Soient  $z_j$  et  $z'_j$  des variables binaires telles que pour  $j = 1, \dots, n$  :

$$z_j = \begin{cases} 1 & : y_j \in [a_j, b_j], \\ 0 & : \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$z'_j = \begin{cases} 1 & : y'_j \in [c_j, d_j], \\ 0 & : \text{sinon.} \end{cases}$$



Avec les nouvelles variables,  $(P_{seuil})$  s'exprime sous la forme suivante :

$(P_{seuil}^{bin}) :$

$$\min (\mathbf{y} + \mathbf{y}')^t \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \mathbf{y}')$$

s.c.

$$\sum_{j=1}^n r_j (y_j + y'_j) = R,$$

$$\sum_{j=1}^n (y_j - y'_j) = 1,$$

$$a_j z_j \leq y_j \leq b_j z_j \quad : j = 1, \dots, n, \quad (4.32)$$

$$c_j z'_j \leq y'_j \leq d_j z'_j \quad : j = 1, \dots, n, \quad (4.33)$$

$$z_j z'_j = 0 \quad : j = 1, \dots, n, \quad (4.34)$$

$$z_j, z'_j \in \{0, 1\} \quad : j = 1, \dots, n. \quad (4.35)$$

Les deux modèles  $(P_{seuil})$  et  $(P_{seuil}^{bin})$  sont équivalents dans le sens où

- Si  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$  est une solution optimale de  $(P_{seuil})$ , alors nous pouvons trouver  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}'$  tels que  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')$  soit une solution optimale de  $(P_{seuil}^{bin})$ .
- Si  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')$  est une solution optimale de  $(P_{seuil}^{bin})$  alors  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$  est une solution optimale de  $(P_{seuil})$ .

Notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble défini par

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]^n \times [0, 1]^n : \sum_{j=1}^n r_j (y_j + y'_j) = R, \sum_{j=1}^n (y_j - y'_j) = 1, \\ a_j z_j \leq y_j \leq b_j z_j, c_j z'_j \leq y'_j \leq d_j z'_j, j = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

**Théorème 4.4** Définir la fonction de pénalité  $p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := \sum_{j=1}^n (z_j + z'_j) - \sum_{j=1}^n (z_j - z'_j)^2. \quad (4.36)$$

(i) La fonction  $p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')$  est concave.

(ii) La fonction  $p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')$  est non-négative sur  $\mathcal{A}$  et si

$$A_1 = \{(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} : z_i z'_i = 0, z_i, z'_i \in \{0, 1\} \quad : i = 1, \dots, n\}$$

et

$$A_2 = \{(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} : p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \leq 0\},$$

alors  $A_1 = A_2$ .

**Preuve :**

(i) Soient  $p_j : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions définies par

$$p_j(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := (z_j + z'_j) - (z_j - z'_j)^2 \quad : \forall j = 1, \dots, n$$

et  $\varphi_j : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions définies par

$$\varphi_j(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := (z_j - z'_j)^2 \quad : \forall j = 1, \dots, n.$$

Les fonctions  $\varphi_j, j = 1, \dots, n$  sont convexes car elles sont la composition de fonctions convexes avec des fonctions linéaires. Par conséquent  $p_j$  est concave car elle est la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction concave. En outre,  $p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := \sum_{j=1}^n p_j(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')$  et nous savons que la somme de fonctions concaves est concave, alors  $p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')$  est une fonction concave.

(ii) Après remis en ordre les éléments de (4.36), nous obtenons

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := 2 \sum_{j=1}^n (z_j z'_j) + \sum_{j=1}^n z_j (1 - z_j) + \sum_{j=1}^n z'_j (1 - z'_j).$$

Tous les éléments du côté droit sont non-négatifs sur  $\mathcal{A}$  alors  $p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \geq 0$  pour tout  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A}$ . De plus

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') = 0 \iff \begin{cases} z_j z'_j = 0 & : \forall j = 1, \dots, n, \\ z_j (1 - z_j) = 0 & : \forall j = 1, \dots, n, \\ z'_j (1 - z'_j) = 0 & : \forall j = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (4.37)$$

ou

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') = 0 \iff \begin{cases} z_j z'_j = 0 & : \forall j = 1, \dots, n, \\ z_j \in \{0, 1\} & : \forall j = 1, \dots, n, \\ z'_j \in \{0, 1\} & : \forall j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.38)$$

Cela veut dire

$$\begin{aligned} & \{(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} : z_j z'_j = 0, z_j, z'_j \in \{0, 1\} : i = 1, \dots, n\} \\ & = \{(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} : p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') = 0\}. \end{aligned}$$

D'ailleurs  $p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')$  est non-négatif sur  $\mathcal{A}$  donc

$$\{(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} : p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') = 0\} = \{(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} : p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \leq 0\}.$$

En prenant en compte cette relation et (4.38), nous concluons  $A_1 = A_2$ . □

Ce théorème nous permet de réécrire le modèle ( $P_{seuil}^{bin}$ ) sous la forme suivante

$$\min \{V(\mathbf{y}, \mathbf{y}') := (\mathbf{y} + \mathbf{y}')^t Q(\mathbf{y} + \mathbf{y}') : (\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A}, p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \leq 0\}. \quad (4.39)$$

Puisque  $V$  est une fonction convexe et  $\mathcal{A}$  est un polyèdre convexe borné et en outre  $p$  est concave et non-négatif sur  $\mathcal{A}$ , alors d'après le théorème (4.1), il existe  $t_0 \geq 0$  tel que pour tout  $t > t_0$ , le modèle (4.39) est équivalent à

$$\min \{ F(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := (\mathbf{y} + \mathbf{y}')^t Q(\mathbf{y} + \mathbf{y}') + tp(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') : (\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} \}.$$

La fonction  $F$  est convexe en variables  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}'$ , mais  $F$  est concave en variables  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}'$ . Par conséquent,  $F$  est une fonction DC. Une décomposition DC est la suivante

$$(P_{seuil}^{DC}) : \min \{ F(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := g(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') - h(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') : (\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathbb{R}^{4n} \},$$

telle que

$$g(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := (\mathbf{y} + \mathbf{y}')^t Q(\mathbf{y} + \mathbf{y}') + \chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}'),$$

et

$$h(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := t \left( \sum_{j=1}^n (z_j - z'_j)^2 - \sum_{j=1}^n (z_j + z'_j) \right).$$

$\chi_{\mathcal{A}}$  est la fonction indicatrice de  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire,  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') = 0$  si  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A}$  et  $+\infty$  sinon.

### 4.5.2 Résolution de $(P_{seuil}^{DC})$ par DCA

D'après le schéma générique de DCA, il nous faut calculer sous-gradient de la fonction  $h$  définie par  $h(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := t \left( \sum_{j=1}^n (z_j - z'_j)^2 - \sum_{j=1}^n (z_j + z'_j) \right)$ . Le sous-gradient de  $h$  est de la forme suivante :

$$(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}'^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{v}'^k) \in \partial h(\mathbf{y}^k, \mathbf{y}'^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k) \Leftrightarrow \begin{cases} u_j^k = 0 & : j = 1, \dots, n, \\ u_j'^k = 0 & : j = 1, \dots, n, \\ v_j^k = t(2(z_j^k - z_j'^k) - 1) & : j = 1, \dots, n, \\ v_j'^k = t(2(z_j'^k - z_j^k) - 1) & : j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.40)$$

Afin de calculer  $(\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{y}'^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}'^{k+1})$ , le problème suivant doit être résolu :

$$\min \{ (\mathbf{y} + \mathbf{y}')^t Q(\mathbf{y} + \mathbf{y}') - \langle (\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}'), (\mathbf{u}^k, \mathbf{u}'^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{v}'^k) \rangle : (\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} \}. \quad (4.41)$$

L'algorithme DCA qui résout de problème  $(P_{seuil}^{DC})$  se résume ainsi :

#### Algorithme 4.3 Schéma de DCA

##### Initialisation :

– Choisir  $(\mathbf{y}^0, \mathbf{y}'^0, \mathbf{z}^0, \mathbf{z}'^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]^n \times [0, 1]^n$  et mettre  $k = 0$ .

– Choisir la tolérance  $\epsilon$  positive suffisamment petite.

**Répéter :**

- Calculer  $(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}'^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{v}'^k) \in \partial h(\mathbf{y}^k, \mathbf{y}'^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k)$  via (4.40).
- Calculer  $(\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{y}'^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}'^{k+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}'^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{v}'^k)$  en résolvant le programme quadratique (4.41).
- $k + 1 \leftarrow k$ .

**Jusqu'à**

$$\|(\mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{y}'^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}'^{k+1}) - (\mathbf{y}^k, \mathbf{y}'^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k)\| \leq \epsilon.$$

Le théorème de convergence de l'algorithme 4.3 se résume dans le théorème suivant ([91, 94, 139]).

**Théorème 4.5** (*Propriétés de la convergence de l'algorithme (4.3)*)

- (i) L'algorithme 4.3 génère une suite  $\{(\mathbf{y}^k, \mathbf{y}'^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k)\}$  tel que la suite  $(\mathbf{y}^k + \mathbf{y}'^k)^t Q(\mathbf{y}^k + \mathbf{y}'^k) + t p(\mathbf{y}^k, \mathbf{y}'^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k)$  est décroissante.
- (ii) Il existe un nombre non-négatif  $t$  tel que pour chaque  $t \geq t_0$  la suite  $\{p(\mathbf{y}^k, \mathbf{y}'^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k)\}$  est décroissante. En particulier, si  $(\mathbf{y}^r, \mathbf{y}'^r, \mathbf{z}^r, \mathbf{z}'^r)$  est une solution admissible de  $(P_{seuil}^{bin})$  alors  $(\mathbf{y}^k, \mathbf{y}'^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k)$ , pour tout  $k \geq r$ , est admissible également.
- (iii) DCA a un taux de convergence linéaire pour le problème  $(P_{seuil}^{DC})$ .
- (iv) La suite  $\{(\mathbf{y}^k, \mathbf{y}'^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{z}'^k)\}$  converge à  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}'^*, \mathbf{z}^*, \mathbf{z}'^*)$  où le point  $(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}'^*, \mathbf{z}^*, \mathbf{z}'^*)$  est un point critique du problème  $(P_{seuil}^{DC})$ .

#### 4.5.2.1 Choix de point initial pour DCA

Afin de choisir un bon point initial, nous avons testé plusieurs choix. Le premier consiste d'abord à résoudre le problème relaxé du  $(P_{seuil})$ . Ce problème résulte de la suppression des contraintes de complémentarité et relaxation des contraintes de seuil. Soit  $(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}}')$  la solution de ce problème. Le point initial de DCA est  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')$ , tel que  $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{y}' = \tilde{\mathbf{y}}', \mathbf{z} = \mathbf{0}$  et

$$z_j := \begin{cases} 1, & \text{si } R < r_j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La solution fournie par cette procédure n'est pas forcément une solution admissible pour  $(P_{seuil}^{DC})$  mais après seulement une itération, DCA trouvera une solution admissible pour  $(P_{seuil}^{DC})$ .

Les autres points initiaux testés sont :

- la solution optimale du problème relaxé de  $(P_{seuil}^{bin})$ ,
- la solution optimale du problème suivant

$$\min \left\{ p(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') := \left( \sum_{j=1}^n (z_j + z'_j) - \sum_{j=1}^n (z_j - z'_j)^2 \right) : (\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \mathcal{A} \right\}.$$

### 4.5.2.2 Relancer DCA

Du point de vue théorique, il existe  $t_0 > 0$  tel que pour chaque  $t > t_0$ , les problèmes  $(P_{seuil}^{bin})$  et  $(P_{seuil}^{DC})$  soient équivalents. Pourtant, le calcul de la valeur exacte de  $t_0$  n'est pas facile. Nous avons testé plusieurs valeurs différentes et enfin nous avons choisi une valeur pour laquelle  $(\mathbf{y} + \mathbf{y}')^t \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \mathbf{y}')$  soit aussi petit que possible tout en essayant d'obtenir les valeurs binaires pour  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}'$ . Pour les valeurs de  $t$  que nous avons choisies, le premier objectif était atteint mais toutes les variables  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}'$  n'étaient pas binaires. Afin d'obtenir des solutions binaires nous avons relancé DCA. La procédure consiste d'abord à résoudre le problème  $(P_{seuil}^{DC})$  par DCA. Soit  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')^1$  la solution fournie par DCA. Si  $(\mathbf{z}, \mathbf{z}') \in \{0, 1\}^{2n}$ , nous ne relançons pas l'algorithme DCA. Supposons qu'il existe un  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) tel que  $z_k$  soit très proche de 1 (ou respectivement de 0), alors nous ajoutons la contrainte  $z_k = 1$  (ou respectivement  $z_k = 0$ ) au problème  $(P_{seuil}^{DC})$ . Après avoir effectué ces changements, nous relançons DCA pour résoudre le problème modifié. Nous utilisons  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')^1$  pour démarrer DCA. De cette manière, nous trouvons des solutions binaires.

## 4.5.3 Résolution globale de $(P_{seuil})$

### 4.5.3.1 Algorithme par séparation et évaluation (SE)

Afin d'évaluer les solutions fournies par DCA et de trouver la solution globale de  $(P_{seuil})$ , un algorithme par séparation et évaluation (SE) a été utilisé. Cet algorithme résout le problème relaxé de  $(P_{seuil})$  pour trouver la borne inférieure. Plus précisément, la résolution du problème suivant donne la borne inférieure

$$\begin{aligned}
 & (P_{seuil}^{relaxe}) : \\
 & \min (\mathbf{y} + \mathbf{y}')^t \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \mathbf{y}') \\
 & \text{s.c.} \\
 & \sum_{j=1}^n r_j (y_j + y'_j) = R, \\
 & \sum_{j=1}^n (y_j - y'_j) = 1, \\
 & 0 \leq y_j \leq b_j \quad : j = 1, \dots, n, \\
 & c_j \leq y'_j \leq 0 \quad : j = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Le problème  $(P_{seuil}^{relaxe})$  s'obtient après que nous supprimons les contraintes de complémentarité, i.e.

$$y_j y'_j = 0 \quad : j = 1, \dots, n,$$

et remplaçons les contraintes suivantes

$$y_j \in \{0\} \cup [a_j, b_j], y'_j \in \{0\} \cup [c_j, d_j], \quad j = 1, \dots, n,$$

par

$$0 \leq y_j \leq b_j, c_j \leq y'_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

La borne supérieure est mise à jour lorsqu'une meilleure solution du problème ( $P_{seuil}$ ) est trouvée. La séparation est effectuée sur les variables qui ne respectent pas soit les contraintes de complémentarité soit les contraintes de seuil, de façon que, soit

$$y_j = 0, y'_j = 0,$$

soit

$$y_j = 0, y'_j \in [c_j, 0],$$

soit

$$y'_j = 0, y_j \in [0, b_j].$$

#### 4.5.3.2 Approche combinée pour résoudre ( $P_{seuil}$ )

Pour trouver la solution optimale de ( $P_{seuil}$ ) et améliorer la performance de l'algorithme par séparation et évaluation, nous l'avons combiné avec DCA. A chaque itération de l'algorithme par séparation et évaluation, si les conditions sont favorables, DCA est relancé. Le but est de trouver une meilleure solution. Cette solution sert à améliorer la borne supérieure. De cette façon, la convergence de SE sera plus rapide. DCA est relancé, soit juste après la première itération de SE, soit le moment où l'indice de la variable, sur laquelle la séparation va être effectuée, est suffisamment grand (par exemple supérieur ou égal à  $3n/4$ ). Cette condition sert à éviter les cas de sur-utilisation de DCA. Également, nous avons plus de chances de trouver de solutions qui sont admissibles au problème ( $P_{seuil}^{bin}$ ).

Le processus de la méthode combinée se résume ainsi :

Après chaque itération, si les conditions sont favorables (i.e., les conditions citées ci-dessus), alors

1. Construire le sous-problème DC et nommer le *sous-problème relaxé (SPR)*. Ce sous-problème correspond à celui de SE.
2. Résoudre (*SPR*) par DCA. Le point initial de DCA est la solution optimale du sous-problème de SE. Soit  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')^1$  la solution fournie par DCA.
3. Pour chaque  $i = 1, \dots, n$ ,
  - (a) si  $z_i^1 \geq 0.5$  ajouter la contrainte  $z_i = 1$  au problème (*SPR*) sinon ajouter la contrainte  $z_i = 0$  au (*SPR*),
  - (b) si  $z_i'^1 \geq 0.5$  ajouter la contrainte  $z_i' = 1$  au problème (*SPR*) sinon ajouter la contrainte  $z_i' = 0$  au (*SPR*).
4. Relancer DCA pour résoudre le nouveau sous-problème en utilisant  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')^1$  comme le point initial.
  - (a) Si le nouveau sous-problème n'est pas réalisable, retourner à SE,

- (b) sinon, soit  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')^2$  la solution fournie par DCA. Si  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}', \mathbf{z}, \mathbf{z}')^2$  n'est pas une solution améliorante pour  $(P_{seuil})$  alors aller à la prochaine étape, sinon faites une mise à jour de la borne supérieure et de la solution optimale.

5. Continuer l'approche SE.

### 4.5.3.3 Expérience numériques

Les algorithmes ont été codés avec le langage C++ et testés sur un ordinateur Pentium de 3GHz, 1Gb RAM. Pour résoudre les (sous-)problèmes quadratiques nous avons utilisé le logiciel CPLEX en version 9.1.

Les données que nous avons utilisées correspondent aux prix hebdomadaires des actifs financiers du mois de mars 1992 au mois de septembre 1997. Les indices utilisés sont *S&P 100* aux états-unis et *DAX 100* en Allemagne. Les nombres d'actifs sont 98 et 85, respectivement. Pour tous les tests réalisés,  $a_j = 0.05$ ,  $b_j = 1.0$ ,  $c_j = -1.0$ ,  $d_j = -0.0001$ . La tolérance autorisée pour l'écart entre les bornes supérieure et inférieure (i.e.,  $\epsilon$ ) est  $10^{-7}$ . Les valeurs choisies pour le paramètre de pénalité sont égales à  $0.2 \times 10^{-5}$  pour *S&P 100* et à  $0.2 \times 10^{-4}$  pour *DAX 100*.

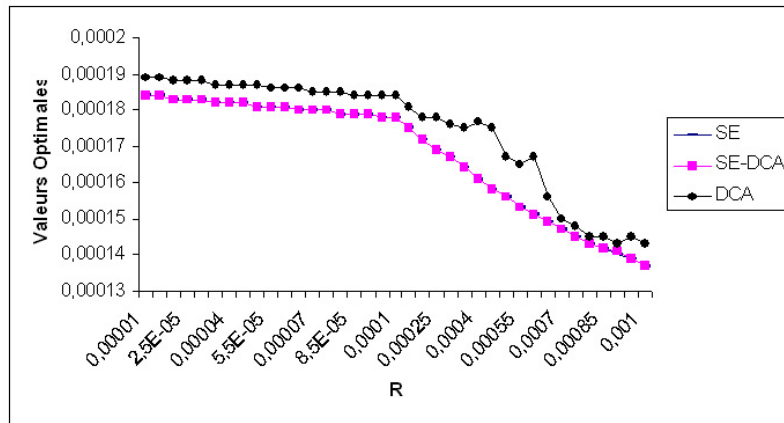
L'algorithme SE et l'approche combinée (SE-DCA) s'arrête si l'écart entre les bornes est inférieure à  $\epsilon$ .

Les tests numériques ont été faits pour différentes valeurs de  $R$ . Nous avons choisi plus de 30 valeurs possibles de  $R$ . Les valeurs pour lesquelles les problèmes étaient réalisables appartenaient à l'intervalle suivant

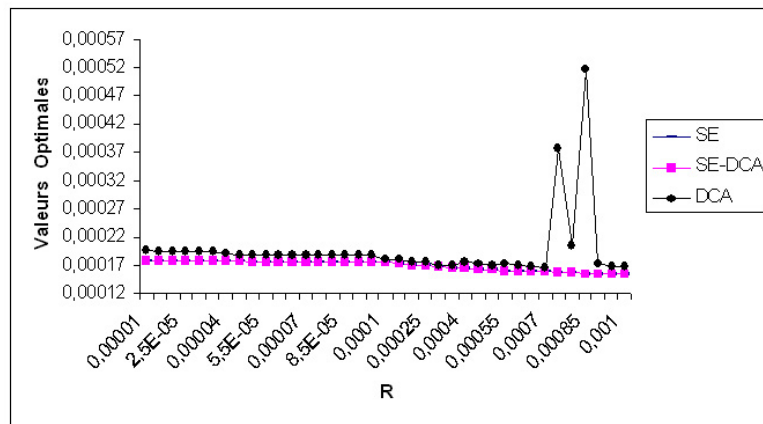
$$\min_{j=1,\dots,n} r_j \leq R \leq \max_{j=1,\dots,n} r_j.$$

Les figures (4.1-4.4) présentent les résultats sur deux jeux de données. Plus précisément, les figures 4.1 sont consacrées aux comparaisons des valeurs optimales fournies par DCA avec celles d'optimales globales. Les figures montrent que les solutions fournies par DCA sont très proches des solutions globales. L'efficacité de DCA est plus visible lorsque nous comparons les temps CPU des algorithmes. Les temps d'exécutions sont montrés sur les figures 4.2. En comparant les temps d'exécutions et les nombres d'itération de l'algorithme SE et l'approche combinée, nous constatons l'influence de DCA sur la convergence de l'approche combinée. Les figures (4.3,4.2) comparent le nombre d'itération et le temps d'exécution de chaque algorithme avec les autres. DCA s'arrête après moins de 10 itérations. Nous constatons que l'approche combinée est, en général, trois ou quatre fois plus rapide que SE. Les figures 4.4 présentent le nombre de relance de DCA en cours d'exécution de l'approche combinée.

Toutes les expérimentations étaient avec  $\epsilon = 10^{-7}$ . Si nous réduisons la précision, c'est-à-dire, si nous augmentons  $\epsilon$  de  $10^{-7}$  à  $0.5 \times 10^{-5}$ , l'influence de DCA sur l'efficacité de l'approche combinée par rapport à SE devient plus visible. Les tableaux (4.4,4.5) présentent les résultats dans les mêmes conditions que les expériences précédentes sauf que  $\epsilon$  est  $0.5 \times 10^{-5}$  et nous avons simplifié les conditions pour que DCA redémarre, de sorte que nous avons



(a) S&amp;P 100



(b) Dax 100

FIGURE 4.1 – Les optimums globaux et les valeurs optimales fournies par DCA

remplacé la condition sur l'indice de variable de séparation (i.e.,  $3n/4$ ) par  $(n/2)$ . D'après les tableaux, l'approche combinée trouve la solution optimale en une seule itération pour un nombre important de valeurs de  $R$ . La convergence rapide de l'approche combinée est liée à l'efficacité de DCA. En comparant les nombres d'itération et les temps CPU de l'algorithme par SE avec ceux de la méthode combinée, nous constatons l'efficacité de la méthode. Pour presque toutes les valeurs de  $R$ , la méthode combinée trouve la solution globale en moins d'une minute, tandis que SE a besoin de beaucoup plus de temps afin de trouver la solution globale.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le modèle classique Moyenne-Variance (MV) de Markowitz. Nous remarquons que ce modèle ne prend pas en considération certains types de

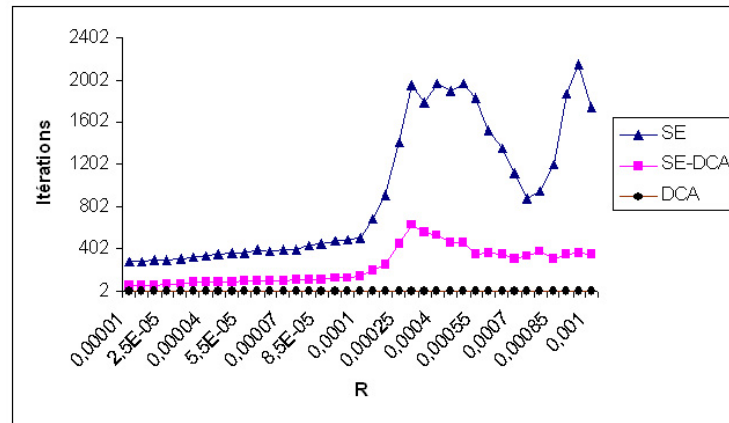


R	DCA			SE			SE-DCA			
	iter	Val. Opt.	CPU	iter	Val. Opt.	CPU	iter	relevance	Val. Opt.	CPU
	0.00001	6	0.000189	1.078	689	0.000184	297.329	1	1	0.000184
0.00002	6	0.000188	1.094	723	0.000183	309.828	1	1	0.000184	1.093
0.00003	7	0.000188	1.250	775	0.000183	333.391	1	1	0.000183	1.094
0.00004	6	0.000187	1.079	842	0.000182	359.750	1	1	0.000182	1.110
0.00005	6	0.000187	1.078	882	0.000181	377.312	1	1	0.000182	1.094
0.00006	7	0.000186	1.219	966	0.000181	413.906	1	1	0.000181	1.109
0.00007	7	0.000185	1.250	963	0.000180	415.594	1	1	0.000180	1.094
0.00008	7	0.000185	1.250	1047	0.000179	457.250	46	3	0.000180	21.594
0.00009	7	0.000184	1.250	1182	0.000179	509.625	46	3	0.000179	21.703
0.0001	7	0.000184	1.234	1250	0.000178	568.469	46	3	0.000178	21.609
0.0002	7	0.000178	1.234	2254	0.000172	992.360	74	29	0.000174	57.891
0.0003	7	0.000176	1.235	4863	0.000167	2105.859	89	13	0.000167	48.297
0.0004	7	0.000177	1.234	4884	0.000161	2153.968	57	3	0.000162	26.078
0.0005	7	0.000167	1.391	4850	0.000156	2151.125	70	3	0.000157	31.578
0.0006	8	0.000167	1.438	3802	0.000151	1707.750	24	1	0.000152	10.531
0.0007	11	0.000150	1.359	2740	0.000147	1241.594	57	3	0.000148	25.750
0.0008	7	0.000145	1.219	2339	0.000143	1058.672	22	1	0.000145	10.703
0.0009	7	0.000143	1.422	4642	0.000140	2092.094	102	3	0.000142	43.969
0.001	8	0.000143	1.375	4305	0.000137	1936.046	165	3	0.000139	70.047

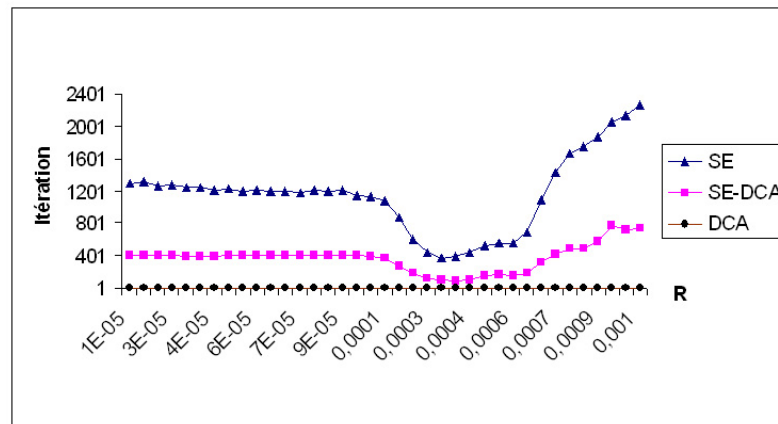
TABLE 4.4 – La performance des algorithmes pour le premier jeu de données (S&P 100) en utilisant l’algorithme par SE et l’approche combinée

R	DCA			SE			SE-DCA			
	iter	Val. Opt.	CPU	iter	Val. Opt.	CPU	iter	relance	Val. Opt.	CPU
0.0001	6	0.000195	0.235	4467	0.000178	1356.859	61	3	0.000178	19.844
0.0002	6	0.000194	0.235	4352	0.000177	1315.000	61	3	0.000178	19.641
0.0003	6	0.000194	0.235	4290	0.000177	1306.469	57	3	0.000177	18.687
0.0004	7	0.000190	0.235	4187	0.000177	1269.719	39	1	0.000177	12.031
0.0005	6	0.000189	0.235	4133	0.000176	1241.953	36	1	0.000177	11.047
0.0006	6	0.000188	0.235	4107	0.000176	1236.203	14	1	0.000176	4.641
0.0007	6	0.000188	0.235	4083	0.000176	1238.281	14	1	0.000176	4.672
0.0008	6	0.000187	0.235	4129	0.000175	1269.781	14	1	0.000175	4.610
0.0009	6	0.000187	0.235	3991	0.000175	1224.282	14	1	0.000175	4.719
0.0001	6	0.000181	0.235	3736	0.000174	1155.343	14	1	0.000175	4.672
0.0002	6	0.000176	0.235	2063	0.000170	653.485	1	1	0.000171	0.797
0.0003	6	0.000171	0.235	1305	0.000167	417.844	1	1	0.000167	0.781
0.0004	6	0.000175	0.235	1496	0.000164	470.157	1	1	0.000164	0.781
0.0005	6	0.000170	0.235	1900	0.000162	597.390	38	3	0.000163	13.265
0.0006	7	0.000170	0.235	2428	0.000159	763.063	42	7	0.000159	17.359
0.0007	6	0.000165	0.235	4924	0.000158	1573.516	42	7	0.000158	17.313
0.0008	6	0.000204	0.235	6023	0.000156	1926.531	42	7	0.000156	17.734
0.0009	7	0.000173	0.235	7212	0.000154	2299.563	103	13	0.000155	40.344
0.001	7	0.000168	0.235	7825	0.000153	2547.953	49	7	0.000153	19.329

TABLE 4.5 – La performance des algorithmes pour le deuxième jeu de données (Dax 100) en utilisant l'algorithme par SE et l'approche combinée



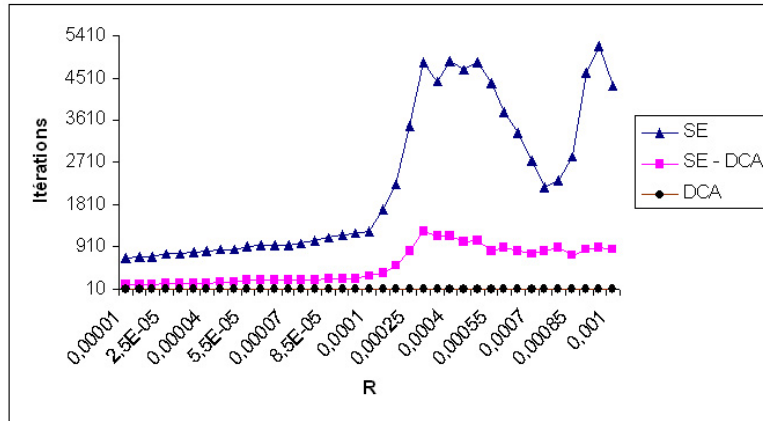
(a) S&amp;P 100



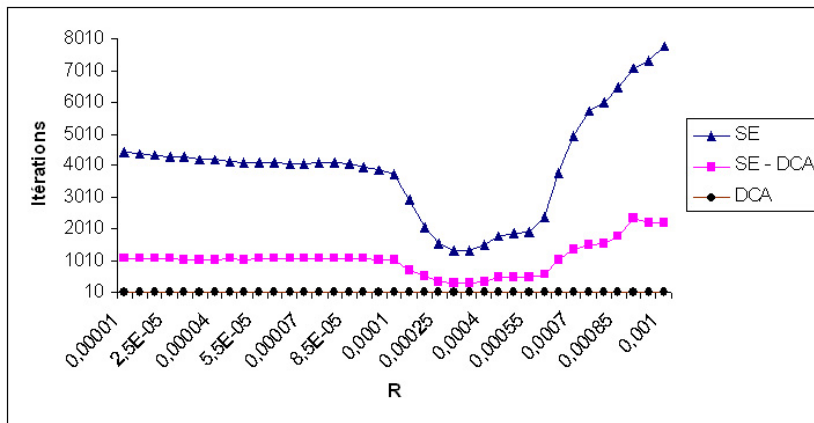
(b) Dax 100

FIGURE 4.2 – CPU en seconde

contraintes du monde réel. Ce sont les contraintes de cardinalité, de seuil d'achat et de seuil. Après avoir ajouté ces contraintes, nous avons exprimé le modèle correspondant sous forme d'un programme mixte en variables binaires. En utilisant un résultat de pénalité exacte basée sur la programmation DC, nous avons reformulé le programme mixte en variables binaire sous forme d'un programme DC. Ensuite, DCA s'est appliqué afin de résoudre le problème DC. Les résultats présentés dans ce chapitre montrent l'efficacité et la performance de DCA pour résoudre les problèmes qui viennent d'être cités. Afin de trouver les solutions globales, une méthode combinée des algorithmes SE et DCA a été introduite. D'après les résultats numériques nous constatons la convergence rapide et la supériorité de la méthode combinée par rapport à l'algorithme SE.

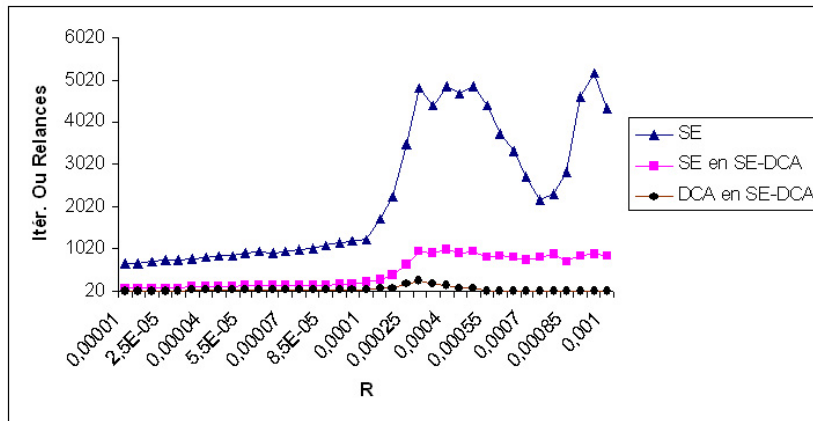


(a) S&P 100

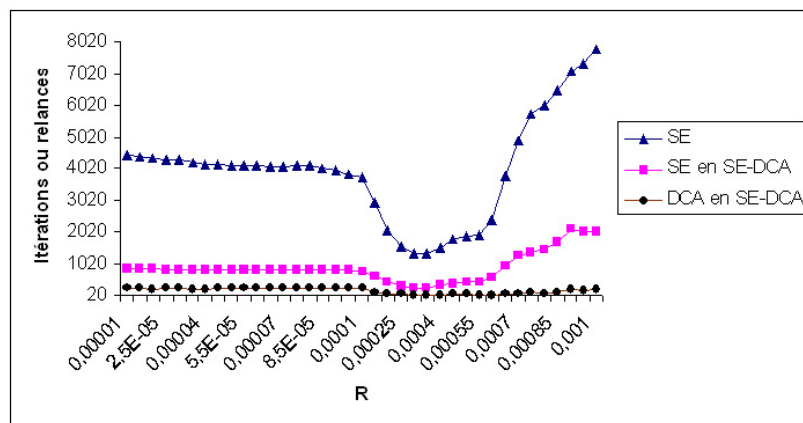


(b) Dax 100

FIGURE 4.3 – Le nombre d'itération de chaque algorithm



(a) S&amp;P 100



(b) Dax 100

FIGURE 4.4 – Le nombre de relance de DCA pendant l'exécution de l'approche combinée (SE-DCA)



# Chapitre 5

## Gestion de portefeuille avec la mesure de risque de baisse sous les contraintes de cardinalité

---

*Résumé* Ce chapitre concerne une nouvelle approche continue basée sur la programmation DC et DCA pour la résolution du problème de gestion de portefeuille avec la mesure de risque de baisse sous les contraintes de cardinalité. Le modèle sous les contraintes de cardinalité s'écrit sous la forme d'un problème d'une programmation mixte en variables binaires. Après avoir mis le modèle sous la forme DC, nous avons appliqué DCA pour le résoudre. Enfin, le problème a été résolu avec un algorithme par Séparation et Evaluation (SE), pour évaluer les résultats obtenus. Une méthode combinée basée sur DCA et SE a été développée pour obtenir les solutions globales tout en essayant d'établir une convergence rapide. Les résultats numériques confirment l'efficacité de notre approche.

---

### 5.1 Introduction

La variance est une mesure de risque classique très utilisée. Elle représente les écarts des rendements par rapport à la moyenne.

**Définition 5.1.1** Soit  $f$  la fonction de densité d'une variable aléatoire comme  $r$ , on définit la variance de  $r$  par

$$\text{Var}(r) = \sigma^2(r) := \sum_r (r - \mathbb{E}(r))^2 f(r) \quad (5.1)$$

où  $\mathbb{E}$  est l'opérateur d'espérance mathématique et la somme est effectuée sur toutes les valeurs possibles de  $r$ . □

D'après la formule 5.1, la variance ne fait aucune différence entre les rendements inférieures à la moyenne et les rendements supérieures à la moyenne, car la variance prend le carré des

écarts en compte. De plus, le poids de chaque écart est sa probabilité d'occurrence. Tandis que parmi les écarts avec les mêmes probabilités d'occurrence, les investisseurs préfèrent ceux positifs, i.e. les écarts qui ont des rendements supérieures à la moyenne. Au contraire, les investisseurs n'aiment pas les écarts négatifs. Alors les écarts négatifs sont considérés comme le risque. Markowitz a proposé la *semivariance* pour pallier le handicap de la variance [113]. La semivariance mesure les écarts négatifs et elle se place dans le cadre des *mesures de risque de baisse* ([27], [122]). Ces mesures de risque considèrent les écarts inférieures à un *objectif* comme le risque. La semivariance est la mesure de risque pour laquelle la moyenne est considérée comme l'objectif. Les mesures de baisse sont utilisées surtout pour les distributions non-normales [27].

Ce chapitre a pour le but d'étudier et de résoudre un cas général d'un modèle dont la mesure de risque est celle de baisse. Le modèle généralisé contient des contraintes de cardinalité. Le modèle a des avantages, le premier étant le choix de la mesure de risque de baisse. Le deuxième avantage est lié à la reformulation du modèle car contrairement au modèle MV il se formule de façon que nous n'ayons plus besoin de la matrice de variance-covariance. Finalement, il existe des contraintes de cardinalité qui limitent le nombre des actifs choisis dans le portefeuille optimal.

Le reste du chapitre est organisé de la façon suivante : Dans la section 5.2, la formulation du modèle de choix de portefeuille sera présenté. Le modèle sera généralisé en section 5.3, afin de prendre les contraintes de cardinalité en compte. En section 5.4, après avoir mis le problème sous la forme d'un modèle de programmation DC, nous utiliserons DCA pour le résoudre. Un algorithme combiné de DCA et l'algorithme par Séparation et Évaluation (SE) est présenté dans la section 5.5, tandis que les résultats numériques sont reportés dans la section 5.6. Nous terminons le chapitre par une conclusion.

## 5.2 Description et formulation

D'abord, nous considérons le modèle MV qui cherche à répartir le mieux possible le capital parmi  $n$  actifs financiers. Supposons qu'une liste des rendements historiques, pour une durée de  $m$  intervalles de temps, soit disponible. Le rendement moyen de l'actif  $i$  se calcule par

$$r_i := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m r_{ij}$$

où  $r_{ij}$  est le rendement de l'actif  $i$  dans l'intervalle  $[j-1, j]$ , tel que  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, m$ . Soient  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)^t$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$  le vecteur des variables de décision représentant les proportions du capital investi dans les actifs. Nous savons que le modèle MV peut s'écrire sous la forme suivante ([8]) :

$$\min \left\{ V(\mathbf{y}) := \mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y} : \sum_{j=1}^n r_j y_j = R, \sum_{j=1}^n y_j = 1, y_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}. \quad (5.2)$$



La solution de ce modèle minimise le risque défini par  $\mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y}$  pour un gain fixé auparavant,  $R$ .  $\mathbf{Q}$  est la matrice de Variance-Covariance dont l'élément  $(i, j)$  est calculé par

$$\sigma_{i,j} := \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (r_{ik} - r_i)(r_{jk} - r_j). \quad (5.3)$$

Le programme 5.2 est un modèle de programmation quadratique pour lequel des algorithmes efficaces existent.

**Théorème 5.1** *Le modèle (5.2) est équivalent à*

$$\min \left\{ V(\mathbf{y}) := (1/m) \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i - R \right]^2 : \sum_{i=1}^n r_i y_i = R, \sum_{i=1}^n y_i = 1, y_i \geq 0, : i = 1, \dots, n \right\}. \quad (5.4)$$

**Preuve :** Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  dont l'élément  $(j, i)$  est  $a_{ji}$  et est défini par

$$a_{ji} := r_{ij} - r_i$$

ensuite,

$$\sum_{j=1}^m a_{ji}^2 = \sum_{j=1}^m (r_{ij} - r_i)^2 \quad : \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (5.5)$$

qui sont les éléments sur la diagonale de la matrice  $A^t A$  et l'élément non-diagonal  $(i, k)$  de cette matrice se calcule par

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} a_{jk} = \sum_{j=1}^m (r_{ij} - r_i)(r_{kj} - r_k). \quad (5.6)$$

Si nous comparons les relations (5.5) et (5.6) avec la définition des éléments de la matrice de variance-covariance, nous constatons que le  $i$ -ème élément sur la diagonale de  $A^t A$  est  $m\sigma_i^2$  et l'élément  $(i, k)$  (non-diagonal) de  $A^t A$  est égal à  $m\sigma_{ik}$ . Le résultat est de  $A^t A = m\mathbf{Q}$ . Par ailleurs,

$$\mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y} = \frac{1}{m} \mathbf{y}^t (A^t A) \mathbf{y} = \frac{1}{m} (\mathbf{y}^t A^t) (A \mathbf{y}) = \frac{1}{m} (A \mathbf{y})^t A \mathbf{y}$$

et

$$A \mathbf{y} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} y_i \end{pmatrix}$$

alors,

$$\mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y} = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^n a_{1i} y_i, \sum_{i=1}^n a_{2i} y_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{mi} y_i \right) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} y_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} y_i \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n a_{ji} y_i \right]^2.$$

Puisque  $a_{ji} := r_{ij} - r_i$  alors

$$\mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n (r_{ij} - r_i) y_i \right]^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i - \sum_{i=1}^n r_i y_i \right]^2.$$

D'ailleurs

$$\sum_{i=1}^n r_i y_i = R$$

ce qui donne le résultat suivant

$$\mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i - R \right]^2.$$

Cette relation complète la démonstration du théorème. □

La représentation (5.4) montre que le calcul du risque  $V(\mathbf{y})$  consiste à trouver le rendement de portefeuille à chaque intervalle de temps et à calculer son écart par rapport au gain fixé.

Soit

$$R_j := \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i$$

le rendement du portefeuille  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$  en intervalle  $j$ . Alors

$$V(\mathbf{y}) := \mathbf{y}^t \mathbf{Q} \mathbf{y} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [R_j - R]^2.$$

Le premier constat est l'indifférence entre les cas  $R_j > R$  et  $R_j < R$ . Pourtant, un investisseur, en général, préfère le portefeuille pour lequel  $R_j > R$ . Car il signifie que le portefeuille a un rendement supérieur au gain fixé. Cet investisseur considère le cas  $R_j < R$  comme le risque. Afin de distinguer les cas  $R_j > R$  et  $R_j < R$  et de considérer  $R_j < R$  comme le risque, l'approche consiste à définir la mesure de risque par

$$V(\mathbf{y}) := \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [\min(0, R_j - R)]^2.$$

Cette formule explique une *mesure de risque de baisse* pour laquelle l'objectif est le rendement attendu du portefeuille (i.e.,  $R$ ). Pour le cas général, l'objectif n'est pas impérativement le rendement attendu (le gain fixé) du portefeuille ([27, 33, 65, 122]).

Avec la nouvelle mesure de risque, le modèle à traiter est

(P) :

$$\begin{aligned} \min V(y) &:= (1/m) \sum_{j=1}^m [\min(0, R_j - R)]^2 \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^n r_i y_i = R, \\ & \sum_{i=1}^n y_i = 1, \\ & y_i \geq 0 \quad : i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Soient  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  des variables réelles telles que

$$-x_j := \min(0, R_j - R)$$

alors, pour chaque  $j = 1, \dots, m$  nous avons

$$x_j = \begin{cases} 0, & \text{si } R - R_j \leq 0, \\ R - R_j, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.7)$$

Les résultats immédiats de ces relations sont les contraintes  $x_j \geq 0$  et  $x_j + \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i \geq R$  qui doivent être ajoutées au modèle. En remplaçant  $R_j - R$  par  $x_j$  dans le modèle (P), le nouveau problème s'exprime ainsi

(P') :

$$\begin{aligned} \min \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= (1/m) \sum_{j=1}^m x_j^2 \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i=1}^n r_i y_i = R, \\ & \sum_{i=1}^n y_i = 1, \\ & x_j + \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i \geq R \quad : j = 1, \dots, m, \quad (5.8) \\ & y_i \geq 0 \quad : i = 1, \dots, n, \quad (5.9) \\ & x_j \geq 0 \quad : j = 1, \dots, m. \quad (5.10) \end{aligned}$$

**Théorème 5.2** Les deux problèmes  $(P)$  et  $(P')$  sont équivalents dans le sens où

- si  $\mathbf{y}^*$  est l'optimum de  $(P)$ , alors  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  est celui de  $(P')$ , avec  $-x_j^* = \min(0, R_j^* - R)$  ;
- si  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  est l'optimum de  $(P')$ , alors  $\mathbf{y}^*$  est celui de  $(P)$ .

**Preuve :** Soient  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  la solution optimale de  $(P')$ . Clairement

$$-x_j^* \leq R_j^* - R \quad \text{et} \quad -x_j^* \leq 0.$$

Cela veut dire  $-x_j^* \leq \min(0, R_j^* - R)$ . Nous allons démontrer qu'il faut  $-x_j^* = \min(0, R_j^* - R)$ . S'il existe  $k(1 \leq k \leq m)$  tel que  $-x_k^* < \min(0, R_k^* - R)$ , alors  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  ne peut pas être la solution optimale de  $(P')$  car  $\mathbf{x} = (x_1^*, \dots, \tilde{x}_k, \dots, x_m^*, y_1, \dots, y_n)$  où  $\tilde{x}_k := \min(0, R_k^* - R)$  est admissible pour  $(P')$  et

$$\sum_{j=1}^m (x_j^*)^2 \geq \sum_{j \neq k, j=1}^m (x_j^*)^2 + (\tilde{x}_k)^2$$

cette contradiction nous montre que :

$$-x_j^* = \min(0, R_j^* - R) \quad : \quad \forall j.$$

Si la solution optimale de  $(P)$  n'est pas  $\mathbf{y}^*$  alors il existe une solution admissible pour  $(P)$  comme  $\hat{\mathbf{y}}$  telle que

$$(1/m) \sum_{j=1}^m [\min(0, R_j^* - R)]^2 > (1/m) \sum_{j=1}^m [\min(0, \hat{R}_j - R)]^2$$

où  $\hat{R}_j := \sum_{i=1}^n r_{ij} \hat{y}_i$ .  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$  est une solution admissible de  $(P')$  et

$$-\hat{\mathbf{x}} := \min(0, \hat{R}_j - R).$$

Puisque  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  est optimal pour  $(P')$  alors

$$(1/m) \sum_{j=1}^m \hat{x}_j^2 \geq (1/m) \sum_{j=1}^m (x_j^*)^2.$$

Mais

$$(1/m) \sum_{j=1}^m \hat{x}_j^2 = (1/m) \sum_{j=1}^m [\min(0, \hat{R}_j - R)]^2$$

et

$$(1/m) \sum_{j=1}^m [\min(0, R_j^* - R)]^2 = (1/m) \sum_{j=1}^m (x_j^*)^2.$$

Ce qui est en contradiction avec l'optimalité de  $\hat{\mathbf{y}}$ . Nous pouvons alors conclure que si  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  est une solution optimale de  $(P')$ ,  $\mathbf{y}^*$  est une solution optimale de  $(P)$ .

D'une manière réciproque, soit  $\mathbf{y}^*$  une solution optimale de  $(P)$  alors  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  sera une solution admissible de  $(P')$ , où

$$-x_j^* := \min(0, R_j^* - R) \quad j = 1, \dots, m.$$

Si  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  n'est pas l'optimum de  $(P')$  alors il existe  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$  telle qu'elle est une solution optimale pour  $(P')$  et

$$-\hat{x}_j := \min(0, \hat{R}_j - R) \quad j = 1, \dots, m.$$

$\mathbf{y}^*$  est l'optimum de  $(P)$  et  $\hat{\mathbf{y}}$  est une solution admissible de  $(P)$  alors

$$(1/m) \sum_{j=1}^m [\min(0, R_j^* - R)]^2 \leq (1/m) \sum_{j=1}^m [\min(0, \hat{R}_j - R)]^2$$

ou

$$(1/m) \sum_{j=1}^m (x_j^*)^2 \leq (1/m) \sum_{j=1}^m (\hat{x}_j)^2$$

ce qui est en contradiction avec l'optimalité de  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$  pour  $(P)$ . Le résultat est que  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  est l'optimum de  $(P')$ .

En bref, nous avons démontré que les deux problèmes  $(P)$  et  $(P')$  sont équivalents tels que

- si  $\mathbf{y}^*$  est l'optimum de  $(P)$ , alors  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  est celui de  $(P')$ , avec  $-x_j^* = \min(0, (R_j^* - R))$ ;
- si  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  est l'optimum de  $(P')$ , alors  $\mathbf{y}^*$  est celui de  $(P)$ .  $\square$

L'ensemble des solutions admissibles de  $(P')$  est borné par rapport à  $\mathbf{y}$ , pour qu'il soit aussi borné par rapport à  $\mathbf{x}$  nous allons imposer certaines contraintes tout en gardant l'équivalence entre  $(P)$  et  $(P')$ .

Nous avons démontré que pour chaque solution optimale, la condition suivante doit être satisfaite pour tout  $j = 1, \dots, m$

$$x_j = -\min\{0, R_j - R\} = \max\{0, R - R_j\} = \max\{0, R - \sum_{i=1}^n r_{ij}y_i\}.$$

Ce qui montre que nous pouvons considérer les bornes supérieures suivantes pour les variables  $x_j$

$$\beta_j := \max\{0, \alpha_j\} : j = 1, \dots, m$$

où

$$\alpha_j := \max \left\{ R - \sum_{i=1}^n r_{ij}y_i : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n r_{ij}y_i = R, \sum_{i=1}^n y_i = 1, x_j \geq 0, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Les bornes supérieures peuvent être calculées en résolvant les programmes linéaires, cités ci-dessus.

Après avoir ajouté les nouvelles contraintes, nous obtenons le problème suivant

( $P''$ ) :

$$\begin{aligned} \min \theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= (1/m) \sum_{j=1}^m x_j^2 \\ \text{s.c.} & \\ & \sum_{i=1}^n r_i y_i = R, \\ & \sum_{i=1}^n y_i = 1, \\ x_j + \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i &\geq R && : j = 1, \dots, m, \\ y_i &\geq 0 && : i = 1, \dots, n, \\ 0 \leq x_j &\leq \beta_j && : j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Le nouveau problème est équivalent aux ( $P'$ ) et ( $P$ ). Soient  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  et  $(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}})$  les optimums de ( $P'$ ) et ( $P''$ ), respectivement. L'ensemble des solutions admissibles de ( $P''$ ) est un sous-ensemble de celui de ( $P'$ ), alors  $\theta(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq \theta(\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}})$ . En outre, pour chaque  $j = 1, \dots, m$

$$x_j^* = \max\{0, R - \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i^*\}.$$

Si  $R - \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i^* \leq 0$  alors  $x_j^* = 0$  et ensuite  $x_j^* \in [0, \beta_j]$ . Si  $R - \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i^* > 0$  alors  $x_j^* = R - \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i^*$ . D'après la définition de  $\alpha_j$  nous avons  $x_j^* \leq \alpha_j$ . D'ailleurs,  $\beta_j \geq \alpha_j$ . Cela veut dire que  $x_j^* \in [0, \beta_j]$ . Nous en concluons l'équivalence entre les modèles ( $P'$ ) et ( $P''$ ) car chaque solution optimale de ( $P'$ ) est une solution admissible de ( $P''$ ).

### 5.3 Contraintes de cardinalité

Une généralisation du modèle ( $P''$ ) consiste en l'introduction des contraintes de cardinalité. Ces contraintes limitent le nombre des actifs tenus dans le portefeuille. L'introduction de ces contraintes exige des contraintes de bornes. Ces contraintes limitent la proportion du capital investie dans chaque actif. Dans l'absence de vente-à-découvert, les bornes  $0 \leq y_i \leq 1$  existent dans le modèle de façon naturelle. Soient  $a_i$  et  $b_i$  les paramètres associés aux bornes inférieure et supérieure sur l'investissement dans l'actif  $i$ . Il faut  $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$ . Soit '*card*'

le nombre des actifs que l'investisseur veut avoir dans le portefeuille. Si  $a_i = 0$ , alors  $card$  sera le nombre maximum d'actifs choisis dans lesquels une proportion positive du capital a été investi. Si  $a_i \neq 0$  alors  $card$  donne le nombre exact des actifs choisis. Nous définissons  $z_i$  la variable de décision qui montre la présence ou l'absence de l'actif  $i$  dans le portefeuille. Si  $z_i = 1$ , l'actif  $i$  est inclus dans le portefeuille et  $z_i = 0$  sinon. En utilisant ces notations supplémentaires, le modèle  $(P'')$  sous les contraintes de cardinalité s'exprime par

$(P_{card}) :$

$$\min \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := (1/m) \sum_{j=1}^m x_j^2$$

s.c.

$$\sum_{i=1}^n r_i y_i = R,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1,$$

$$x_j + \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i \geq R \quad : j = 1, \dots, m,$$

$$0 \leq x_j \leq \beta_j \quad : j = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = card, \quad (5.11)$$

$$a_i z_i \leq y_i \leq b_i z_i \quad : i = 1 \dots, n, \quad (5.12)$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad : i = 1, \dots, n. \quad (5.13)$$

A cause des contraintes 5.11, 5.12 et 5.13 le problème  $(P)$  est difficile à résoudre. La plupart des méthodes utilisées pour résoudre un modèle de choix de portefeuille sous les contraintes de cardinalité s'appuient sur les méthodes heuristiques, comme l'algorithme génétique, recuit simulé et recherche tabou ([16, 29, 51, 154]). Notre approche pour résoudre le problème  $(P_{card})$  consiste à utiliser la méthode DCA.

## 5.4 Programmation DC et DCA pour la résolution du problème

### 5.4.1 Reformulation

Afin de simplifier les formulations, nous définissons l'ensemble  $\mathcal{A}$  comme la suite

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n r_i y_i = R, \sum_{i=1}^n y_i = 1, \sum_{i=1}^n z_i = card, \\ x_j + \sum_{i=1}^n r_{ij} y_i \geq R, 0 \leq x_j \leq \beta_j, j = 1, \dots, m, a_i z_i \leq y_i \leq b_i z_i, i = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

Considérons la fonction de pénalité  $p$  définie par

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := \sum_{i=1}^n z_i(1 - z_i).$$

Clairement, la fonction  $p$  est concave, finie et non-négative sur  $\mathcal{A}$ . De plus, l'ensemble des solutions réalisables de  $(P_{card})$  peut être écrit

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} : z_i \in \{0, 1\}\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} : p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0\} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} : p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq 0\},$$

alors le problème  $(P_{card})$  est simplifié sous la forme

$$\min \left\{ \eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := (1/m) \sum_{j=1}^m x_j^2 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}, \quad p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq 0 \right\}. \quad (5.14)$$

En utilisant le théorème 4.1 concernant la pénalité exacte en programmation DC (voir aussi [105]) sur le problème (5.14), nous allons le reformuler sous forme DC. Les conditions nécessaires pour pouvoir utiliser ce résultat est de l'existence d'une fonction de pénalité comme  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  qui est concave, finie et non-négative sur le polyèdre  $\mathcal{A}$ ; en outre, la convexité de la fonction  $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . D'après le théorème, il existe un  $t_0 \geq 0$  tel que pour tout  $t > t_0$  le problème (5.14) soit équivalent au problème suivant

$$\min \left\{ F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := (1/m) \sum_{j=1}^m x_j^2 + tp(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \right\}. \quad (5.15)$$

La fonction  $F$  est convexe par rapport aux  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  mais concave par rapport à  $\mathbf{z}$ , par conséquent  $F$  est une fonction DC avec la décomposition DC suivante

$$(P_{DC}) : \quad \min \{g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\},$$

où

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := (1/m) \sum_{j=1}^m x_j^2 + \chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$$

et

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := t \sum_{i=1}^n z_i(z_i - 1).$$

Ici,  $\chi_{\mathcal{A}}$  est la fonction indicatrice sur  $\mathcal{A}$ , i.e.,  $\chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$  si  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}$  et  $+\infty$  sinon.

### 5.4.2 Résolution de $(P_{DC})$ par DCA

Selon la description de DCA, la résolution de  $(P_{DC})$  par DCA consiste en la détermination de deux suites  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\}$  et  $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)\}$ . Afin de construire la suite  $\{(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)\}$ , il



nous faut calculer le sous-gradient de la fonction  $h$  défini par  $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := t \sum_{i=1}^n z_i(z_i - 1)$ . Le calcul est fait par

$$(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k) \in \nabla h(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k) \Leftrightarrow u_i^k = 0, v_j^k = 0, w_j^k = t(2z_j^k - 1), \quad (5.16)$$

$$i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

La construction de la suite  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\}$  exige la résolution du programme quadratique

$$\min \left\{ (1/m) \sum_{j=1}^m x_j^2 - \langle (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), (\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k) \rangle : (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \right\}. \quad (5.17)$$

La solution du programme est  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})$ . L'algorithme DCA pour résoudre  $(P_{DC})$  se résume

### Algorithme 5.1 Algorithme de DCA

#### Initialisation :

- Choisir  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0, \mathbf{z}^0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]^n$  et  $k = 0$ .
- Choisir la tolérance  $\epsilon$  positive et suffisamment petite.

#### Répéter

- Calculer  $(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k) \in \partial h(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)$  via (5.16).
- Calculer  $(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)$  en résolvant le programme quadratique (5.17).
- $k + 1 \leftarrow k$ .

**Jusqu'à**  $\|(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{y}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) - (\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\| \leq \epsilon$ .

Le théorème suivant concerne la convergence de DCA pour résoudre  $(P_{DC})$ . La démonstration ressemble à celle des algorithmes de DCA dans le chapitre précédent,

### Théorème 5.3 (Propriétés de la convergence de l'algorithme 5.1)

- (i) L'algorithme 5.1 génère une suite  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\}$  telle que la suite  $\{(1/m) \sum_{j=1}^m (x_j^k)^2 + tp(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\}$  est décroissante.
- (ii) Il existe un nombre non négatif  $t$  tel que pour chaque  $t \geq t_0$  la suite  $\{p(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\}$  est décroissante. En particulier, si  $(\mathbf{x}^r, \mathbf{y}^r, \mathbf{z}^r)$  est une solution admissible de  $(P''')$  alors  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)$ , pour tout  $k \geq r$ , est admissible également.
- (iii) DCA a un taux de convergence linéaire pour le problème  $(P_{DC})$ .
- (iv) La suite  $\{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k)\}$  converge à  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$  où le point  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*)$  est un point critique du problème  $(P_{DC})$ .

### Recherche d'un bon point initial pour DCA

Plusieurs choix de point initial ont été testés pour démarrer DCA. Le meilleur point est trouvé au sein de la procédure suivante

1. **Résoudre le problème relaxé** : Nous résolvons le problème relaxé du  $(P_{card})$  afin de trouver  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$ .
2. **Trouver une solution entière** : Nous mettons  $\tilde{z}_j = 1$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ . Le nouveau point  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}})$  est utilisé afin de démarrer DCA. Ce point n'est pas, en général, un point admissible pour  $(P_{DC})$ , pourtant DCA trouve une solution admissible après une seule itération.

Les autres procédures de choix de point initial que nous avons testées sont les suivantes :

- la solution optimale du modèle relaxé de  $(P_{card})$  ;
- après avoir résolu le modèle relaxé de  $(P_{card})$ , nous mettons les variables binaires non nulles égale à 1 ;
- la solution optimale du problème suivant

$$\min \left\{ \sum_{j=1}^n z_j(1 - z_j) : (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A} \right\}.$$

## 5.5 Résolution globale

Afin de vérifier la qualité des solutions fournies par DCA, un algorithme classique de Séparation et Évaluation (SE) a été utilisé. L'algorithme consiste à résoudre le problème  $(P_{card})$ . Les bornes inférieures sont calculées en relaxant les contraintes binaires, c'est-à-dire les contraintes  $z_j \in \{0, 1\}$  sont remplacées par  $0 \leq z_j \leq 1$ . Les bornes supérieures sont mises à jour si une meilleure solution pour le modèle  $(P_{card})$  est trouvée. La séparation est effectuée sur la variable fractionnelle  $z_j$  telle que soit  $z_j = 0$ , soit  $z_j = 1$ .

Une approche combinée de SE et DCA (SE-DCA) a été développée afin de trouver la solution globale de  $(P_{card})$  tout en essayant d'accélérer la convergence de SE. A chaque itération de SE, si un nombre suffisant des variables  $\mathbf{z}$  sont 0 ou 1, par exemple  $(n/2)$ , DCA est relancé. Le point initial est la solution optimale du sous-problème courant. Avant de l'utiliser, nous la traitons par la procédure citée ci-dessus. Si la solution fournie par DCA est améliorante alors nous l'utilisons pour mettre à jour la meilleure borne supérieure.

## 5.6 Expériences numériques

Nous avons codé les algorithmes en langage C++ et testé sur un ordinateur Pentium de 1.600 GHz et 512Mo RAM. A chaque itération de DCA, nous avons utilisé le logiciel CPLEX en version 9.1 pour trouver la solution des sous-problèmes quadratiques convexes. Nous avons fixé une limite pour le nombre d'itération de SE. La limite est de 40000 itérations.

Afin de réaliser les tests, nous avons généré les données à partir des prix des actifs financiers. Ce sont les actions de certaines compagnies américaines, du 27 septembre 2005 pendant 20

semaines. Les prix sont disponibles sur la page web de YAHOO! FINANCE (<http://finance.yahoo.com>). A partir des prix, nous avons calculé les rendements historiques,  $r_{ij}$ , de chaque actif. La formule de calcul est

$$r_{ij} = (p_{i,j+1} - p_{i,j})/p_{i,j},$$

où  $p_{i,j}$  et  $p_{i,j+1}$  sont les prix de l'actif  $i$  en deux instant successifs  $j$  et  $j + 1$  ( $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, m$ ). Dans nos expérience  $n$  est égal à 550 et  $m$  à 20.

Les expériences ont été faites pour deux ensembles de valeurs des paramètres. Les premières valeurs choisies sont :

- $R = 0.1$  ;
- $a_i = 0.0$  : la borne inférieure sur la proportion du capital investi en actif  $i$  ;
- $b_i = 1.0$  : la borne supérieure sur la proportion du capital investi en actif  $i$  ;
- $\epsilon = 10^{-6}$ .

Les valeurs suivantes sont :

- $R = 0.05$  ;
- $a_i = 0.01$  : la borne inférieure sur la proportion du capital investi en actif  $i$  ;
- $b_i = 1.0$  : la borne supérieure sur la proportion du capital investi en actif  $i$  ;
- $\epsilon = 10^{-6}$ .

Pour toutes les expériences, le paramètre de pénalité a été fixée à 0.05. Nous avons testé les algorithmes pour différentes valeurs de  $card$ . Les valeurs choisies sont 20, ..., 30. Ce sont les valeurs pour lesquelles, comme nous pourrons le constater, le problème ( $P_{card}$ ) est difficile à résoudre par l'algorithme classique SE.

Les tableaux 5.1 et 5.2 présentent les résultats. Dans ces tableaux, le nombre d'itération (iter) de chaque algorithme, les valeurs optimales fournies (Val. Opt.), le temps d'exécution en secondes (CPU) et le nombre d'appel à DCA (relance) au cours de l'approche combinée (SE-DCA) ont été présentés.

## Commentaires sur les résultats

Les résultats numériques dans le tableau 5.1 montrent que :

- Il y a une seule valeur pour tous les cas. La raison est due au fait que nous avons mis la borne inférieure  $a_j$  égale 0.  $a_j$  est la borne inférieure sur la proportion du capital investi dans l'actif  $j$ . En mettant  $a_j = 0$ ,  $card$  est le nombre maximum des actifs composant le portefeuille. De cette façon, en changeant le paramètre  $card$ , le portefeuille optimal ne change pas. Et en effet, le portefeuille est le même pour toutes les différentes valeurs de  $card$ . Il nous faut choisir une valeur plus petite que le nombre d'actifs composant le portefeuille actuel pour que la solution change.
- DCA donne la solution globale, car l'approche combinée qui une méthode globale donne les mêmes valeurs optimales que DCA. Pour le cas  $card = 22$ , il nous faut attendre

card	DCA			SE			SE-DCA			
	iter	Val. Opt.	CPU	iter	Val. Opt.	CPU	iter	relance	Val. Opt.	CPU
20	4	0.003633	0.766	40000	0.004395	10502.000	8	2	0.003633	4.594
21	4	0.003633	0.766	40000	0.004395	10977.282	1	1	0.003633	1.531
22	4	0.003633	0.750	5470	0.003633	1414.156	5056	116	0.003633	1369.578
23	4	0.003633	0.750	40000	0.004395	10366.765	1	1	0.003633	1.531
24	4	0.003633	0.766	40000	0.004395	10804.219	1	1	0.003633	1.672
25	5	0.003633	0.922	40000	0.004395	10415.219	18	2	0.003633	18.359
26	5	0.003633	0.906	40000	0.004395	10642.328	1	1	0.003633	1.562
27	4	0.003633	0.891	40000	0.004497	10617.468	1	1	0.003633	1.531
28	4	0.003633	0.750	40000	0.004395	10611.860	1	1	0.003633	1.703
29	6	0.003633	1.062	40000	0.004395	10621.031	1	1	0.003633	1.687
30	4	0.003633	0.766	40000	0.004395	10953.375	1	1	0.003633	1.687

TABLE 5.1 – La performance des algorithmes pour le premier ensemble de paramètres

card	DCA			SE			SE-DCA			
	iter	Val. Opt.	CPU	iter	Val. Opt.	CPU	iter	reance	Val. Opt.	CPU
20	4	0.000097	0.907	40000	0.000009	15549.063	356	171	0.000001	277.406
21	4	0.000028	0.937	40000	0.000013	15411.813	44	6	0.000001	28.969
22	4	0.000028	1.000	40000	0.000016	15151.391	1688	805	0.000001	1273.860
23	4	0.000026	0.953	40000	0.000014	15255.046	53	12	0.000001	39.563
24	4	0.000022	0.938	40000	0.000012	16003.610	31	5	0.000001	21.172
25	4	0.000027	0.953	40000	0.000015	14916.516	50	18	0.000001	42.875
26	4	0.000025	0.953	40000	0.000012	14628.437	42	4	0.000000	26.391
27	4	0.000019	0.953	1564	0.000000	619.875	47	11	0.000000	34.750
28	4	0.000018	0.938	2884	0.000000	1070.047	26	6	0.000000	19.500
29	4	0.000020	0.937	6625	0.000000	2434.547	46	4	0.000000	28.890
30	4	0.000019	0.953	2783	0.000000	1018.953	30	4	0.000000	20.594

TABLE 5.2 – La performance des algorithmes pour le deuxième ensemble de paramètres

pour que la borne inférieure monte. C'est la raison pour laquelle un nombre important d'itération est nécessaire pour être sûr que la solution courante est l'optimale.

- Pour la plupart des valeurs de  $card$ , l'algorithme SE échoue et il n'arrive pas à trouver le portefeuille optimal dans la limite prévue. En revanche, comme le tableau montre, DCA trouve le portefeuille optimale dans un délai très court et en 4 – 6 itérations. L'influence de DCA dans la convergence rapide de l'approche combinée (SE-DCA) est très remarquable. Pour la plupart des valeurs de  $card$ , SE-DCA s'arrête après une seule itération. Pour les autres cas, il nous faut attendre pour que l'écart entre les bornes supérieure et inférieure soit suffisamment serré.

Le tableau 5.2 montre que :

- Dans la plupart des cas, l'algorithme SE ne trouve pas la solution optimale dans la limite prévue, tandis que SE-DCA y arrive en un temps moyen très court. Le tableau montre aussi que les solutions fournies par SE ne sont pas très proches de celles trouvées par SE-DCA.
- DCA trouve la solution optimale en seulement 4 itérations. La précision des solutions fournies par DCA est  $10^{-4}$ .
- Contrairement au cas  $a_j = 0$ , les bornes inférieures non-zéro nous permettent de produire des portefeuilles différents pour différentes valeurs de  $card$ .

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode DCA pour un modèle de choix de portefeuille. Le modèle adopte une mesure de baisse comme la mesure de risque. De plus, il existe les contraintes de bornes et celles de cardinalité dans le modèle. Après avoir reformulé le modèle, nous avons utilisé DCA pour le résoudre. DCA trouve des solutions de très bonne qualité. Pour évaluer la qualité des solutions fournies par DCA, nous avons utilisé un algorithme classique de SE. Une approche combinée à la base de SE et DCA a été développée. Les résultats numériques confirment la convergence rapide de l'approche combinée (SE-DCA) et la bonne qualité des solutions obtenues par DCA.

# Chapitre 6

## Gestion de portefeuille sous les fonctions de coûts de transaction non convexes

---

*Résumé* Ce chapitre concerne une nouvelle approche continue basée sur la programmation DC et DCA pour la résolution du problème de gestion de portefeuille sous les fonctions de coûts de transaction. Les fonctions étudiées sont non convexes et non-lisses. Un algorithme par séparation et évaluation basé sur la convexification du problème peut être utilisé pour résoudre le problème sous les fonctions de coûts non convexe et non-lisse. Notre approche consiste à estimer les fonctions non-lisses par des fonctions continues et DC polyédrales. Ensuite, DCA s'applique pour résoudre le nouveau modèle. Une approche combinée de DCA et un algorithme SE est proposée. Les résultats numériques confirment l'efficacité de notre approche pour résoudre le problème.

---

### 6.1 Introduction

Une des formulations d'un problème de choix de portefeuille consiste à maximiser le rendement net du portefeuille pour un niveau toléré du risque. Le rendement net du portefeuille se définit par le rendement espéré du portefeuille dont les coûts de transactions ont été soustraits [60]. Les coûts de transactions sont les montants que l'investisseur engage pour ses transactions. L'inclusion des coûts de transaction est un sujet important qui rend le modèle plus réaliste. Si nous négligeons les coûts de transaction, nous courrons le risque de prendre de fausses décisions.

Dans les cas où les coûts de transactions sont négligés ou sont des fonctions linéaires, le modèle correspondant de choix de portefeuille se formalise par un programme linéaire ou quadratique [69]. Pour ces cas, le problème peut être résolu de façon efficace. Pourtant, si les coûts de transaction sont des fonctions non convexes ou non-lisses, le problème devient très difficile à résoudre. Les coûts de transaction que nous allons étudier dans ce chapitre concernent des fonctions non convexes et non-lisses. Plus précisément, nous considérons des

fonctions constantes par morceaux.

L'approche traditionnelle pour résoudre un tel problème consiste à reformuler les fonctions en introduisant des variables binaires ([60],[61]). Ensuite, un algorithme de séparation et évaluation (SE) peut être utilisé afin de résoudre le problème transformé. Cette approche n'est pas très pratique, car plus le nombre d'actifs ou de morceaux augmente, plus le nombre des variables binaires augmente. Par exemple, s'il y a sept morceaux dans les fonctions et que nous disposons de 1000 actifs parmi lesquels nous devons faire notre choix, alors le modèle binaire aura besoin de 7000 variables binaires. Dans ce cas le modèle, qu'il soit linéaire ou quadratique, ne se résout pas dans un délai raisonnable.

Une autre approche de SE consiste à sous-estimer les fonctions en escalier (les fonctions constantes par morceaux) par des enveloppes convexes et à résoudre le problème convexe [60]. Cette idée fonctionne pour les problèmes où le nombre de morceaux est petit, par exemple un ou deux. Lorsque les fonctions ont plus de morceaux constants, par exemple six ou sept, l'algorithme échoue.

Dans ce chapitre, notre étude se focalise sur l'utilisation d'une approche locale basée sur la programmation DC et DCA. L'approche consiste à estimer les fonctions en escalier par des différence de fonctions convexes polyédrales. Ensuite, DCA s'applique pour résoudre le problème.

Afin d'évaluer l'efficacité de l'approche proposée, nous avons comparé les résultats avec ceux fournis par le logiciel CPLEX en version 10.1 et ceux d'un algorithme SE proposé par Konno et al. [60]. Enfin une approche combinée de SE et DCA est proposée pour assurer une convergence plus rapide.

Dans ce chapitre, la mesure de risque adoptée est Mean-Absolute Deviation (MAD), proposé par Konno et al. Notre choix a deux raisons :

- MAD peut s'exprimer sous forme d'un modèle d'une programmation linéaire alors que MV est une programmation quadratique. Un programme linéaire se résout de manière plus efficace qu'un programme quadratique.
- MAD est compatible avec les critères de dominance stochastique. En général, ce n'est pas le cas pour le modèle MV [59].

Le reste du chapitre est organisé de façon suivante : la prochaine section concerne la description et la formulation du modèle de base ainsi qu'une introduction aux différentes formes des coûts de transaction. La section 6.3 est consacrée aux approximations des fonctions en escalier par des fonctions DC polyédrales et la résolution du modèle approché par DCA. Nous allons présenter les méthodes globales dans la section 6.5. Les résultats numériques sont présentés dans la section 6.6. Nous terminons le chapitre par une conclusion dans la dernière section.



## 6.2 Description et formulation

### 6.2.1 Modèle de Déviation Moyenne-Absolue (MAD)

Konno et Yamazaki [62] ont mis au point un modèle de choix de portefeuille exprimable sous forme d'un programme linéaire. Considérons  $R_u$  comme une variable aléatoire qui représente le taux d'intérêt de l'actif  $u$ . Nous supposons que  $(R_1, R_2, \dots, R_n)$  est distribué sur un ensemble fini de points  $(r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt})$  où  $t = 1, \dots, T$  et que

$$\wp_t = Pr\{(R_1, R_2, \dots, R_n) = (r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt})\} \quad (6.1)$$

soit connu auparavant pour  $t = 1, \dots, T$ . Nous adoptons les notations suivantes :

- $M$  = le capital;
- $x_u$  = la portion du capital investi en actif  $u$ ;
- $\beta_u$  = la borne supérieure pour l'investissement en actif  $u$ ;
- $\omega$  = le niveau de risque autorisé.

La déviation absolue  $W(x)$  du portefeuille  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  se définit par

$$W[R(x)] = E[|R(x) - E[R(x)]|] = \sum_{t=1}^T \wp_t \left| \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u)x_u \right|$$

où  $r_u = \sum_{t=1}^T \wp_t r_{ut}$  est la valeur espérée de  $R_u$ . Dans ce qui suit, nous mettons  $\wp_t = 1/T$ , alors

$$r_u = \sum_{t=1}^T r_{ut}/T \text{ et}$$

$$W[R(x)] = \sum_{t=1}^T \wp_t \left| \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u)x_u \right| = \sum_{t=1}^T \left| \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u)x_u \right| / T.$$

Le modèle Mean-Absolute Deviation (MAD) est

$$\max \left\{ \sum_{u=1}^n r_u x_u : W\left[\sum_{u=1}^n R_u x_u\right] \leq \omega M, \sum_{u=1}^n x_u = M, 0 \leq x_u \leq \beta_u, u = 1, \dots, n \right\}. \quad (6.2)$$

Nous pouvons mettre ce problème sous forme d'un modèle de programmation linéaire, pour cela nous introduisons les variables supplémentaires  $\tilde{\psi}_t$  et  $\tilde{\phi}_t$  telles que :

$$\tilde{\psi}_t - \tilde{\phi}_t = \wp_t \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u)x_u$$

et

$$\tilde{\phi}_t \tilde{\psi}_t = 0, \tilde{\phi}_t \geq 0, \tilde{\psi}_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T,$$

alors

$$W[R(x)] = \sum_{t=1}^T |\tilde{\psi}_t - \tilde{\phi}_t|.$$

Mais pour chaque  $t = 1, \dots, T$ ,

- si  $\tilde{\phi}_t = 0$  et  $\tilde{\psi}_t = 0$  alors  $\tilde{\phi}_t + \tilde{\psi}_t = |\tilde{\psi}_t - \tilde{\phi}_t|$ ,
- si  $\tilde{\psi}_t > 0$  alors  $\tilde{\phi}_t = 0$  et  $\tilde{\phi}_t + \tilde{\psi}_t = \tilde{\psi}_t = |\tilde{\psi}_t| = |\tilde{\psi}_t - \tilde{\phi}_t|$ ,
- si  $\tilde{\phi}_t > 0$  alors  $\tilde{\psi}_t = 0$  et  $\tilde{\phi}_t + \tilde{\psi}_t = \tilde{\phi}_t = |\tilde{\phi}_t| = |0 - \tilde{\phi}_t| = |\tilde{\psi}_t - \tilde{\phi}_t|$ .

La déviation absolue s'écrit alors

$$W[R(x)] = \sum_{t=1}^T (\tilde{\phi}_t + \tilde{\psi}_t).$$

Par conséquent, le modèle MAD devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{u=1}^n r_u x_u \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T (\tilde{\phi}_t + \tilde{\psi}_t) \leq \omega M, \\ \tilde{\psi}_t - \tilde{\phi}_t = (1/T) \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u) x_u \quad t = 1, \dots, T, \\ \sum_{u=1}^n x_u = M, \\ \tilde{\phi}_t \tilde{\psi}_t = 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ \tilde{\phi}_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ \tilde{\psi}_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ 0 \leq x_u \leq \beta_u \quad u = 1, \dots, n. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Si nous faisons le changement de variable  $\phi_t := T\tilde{\phi}_t$  et  $\psi_t := T\tilde{\psi}_t$ , le modèle MAD s'exprime alors sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{u=1}^n r_u x_u \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T (\phi_t + \psi_t) \leq \omega M, \\ \psi_t - \phi_t = (1/T) \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u) x_u \quad t = 1, \dots, T, \\ \sum_{u=1}^n x_u = M, \\ \phi_t \psi_t = 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ \phi_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ \psi_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ 0 \leq x_u \leq \beta_u \quad u = 1, \dots, n. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Les modèles 6.3 et 6.4 sont équivalents dans le sens où ils ont les mêmes valeurs optimales et il existe une relation réciproque entre les ensembles de solutions admissibles des modèles.

Dans le modèle 6.4, il existe des contraintes de complémentarité que nous pouvons les supprimer. Ceci est l'objet du théorème suivant :

**Théorème 6.1** *Le modèle 6.4 est équivalent au modèle suivant qui est un modèle de programmation linéaire :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{u=1}^n r_u x_u \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T (\phi_t + \psi_t) \leq \omega M, \\ \psi_t - \phi_t = \wp_t \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u) x_u \quad t = 1, \dots, T, \\ \sum_{u=1}^n x_u = M, \\ \phi_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ \psi_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ 0 \leq x_u \leq \beta_u \quad u = 1, \dots, n. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

**Preuve :** Soit  $(x_1^*, \dots, x_n^*, \psi_1^*, \dots, \psi_T^*, \phi_1^*, \dots, \phi_T^*)$  la solution optimale du problème sans les contraintes de complémentarité. Nous définissons

$$\hat{\psi}_t = \max(\psi_t^* - \phi_t^*, 0), \hat{\phi}_t = -\min(0, \psi_t^* - \phi_t^*), t = 1, \dots, T.$$

Clairement

$$\hat{\psi}_t \geq 0, \hat{\phi}_t \geq 0, t = 1, \dots, T.$$

De plus,

$$\hat{\psi}_t - \hat{\phi}_t = \max(\psi_t^* - \phi_t^*, 0) + \min(0, \psi_t^* - \phi_t^*) = \psi_t^* - \phi_t^*, t = 1, \dots, T.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (\hat{\phi}_t + \hat{\psi}_t) &= \sum_{t=1}^T [\max(\psi_t^* - \phi_t^*, 0) - \min(0, \psi_t^* - \phi_t^*)] \\ &= \sum_{t=1}^T [\max(\psi_t^* - \phi_t^*, 0) + \max(0, \phi_t^* - \psi_t^*)] \leq \sum_{t=1}^T [\psi_t^* + \phi_t^*] \leq \omega M. \end{aligned}$$

Alors  $(x_1^*, \dots, x_n^*, \hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_T, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_T)$  est aussi une solution admissible du modèle sans les contraintes de complémentarité. Puisqu'elle a la même valeur de fonction objectif que  $(x_1^*, \dots, x_n^*, \psi_1^*, \dots, \psi_T^*, \phi_1^*, \dots, \phi_T^*)$ , alors  $(x_1^*, \dots, x_n^*, \hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_T, \hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_T)$  est aussi une solution optimale du modèle sans les contraintes de complémentarité. En même temps, cette

solution satisfait les contraintes de complémentarité. Cela veut dire que nous pouvons supprimer les conditions  $\hat{\psi}_t \hat{\phi}_t = 0, t = 1, \dots, T$  car pour chaque solution du modèle qui ne contient pas les contraintes de complémentarité nous pouvons toujours trouver une solution qui porte la même valeur pour la fonction objectif et de plus, elle satisfait les conditions de complémentarité.  $\square$

## 6.2.2 Coûts de transaction

En pratique, chaque fois qu'un investisseur achète ou vend un ou plusieurs actif(s) (autrement dit, lorsqu'il fait une transaction), il doit payer un montant en tant que coût de transaction ([114], [145]). Les coûts de transaction peuvent être constants, mais ce cas n'est pas très commun et en général les coûts sont proportionnels au volume de transaction (achat ou vente). La présence des coûts de transaction peut influencer significativement le rendement du portefeuille. Ils peuvent non seulement changer le nombre des actifs présents dans le portefeuille mais aussi les portions du capital investi dans chaque actif [114].

Il existe différentes formes des coûts de transaction. Des fois, les coûts de transaction sont relativement grands si les montants d'achat sont petits et ils augmentent au fur et à mesure que les montants d'achat continuent à augmenter. De cette façon, les coûts de transaction forment une fonction concave, linéaire ou constante par morceaux. Cette dernière est très utilisée dans les transactions sur internet ([54, 58, 60, 69]). La Figure 6.1 montre deux différentes formes des fonctions de coûts de transaction.

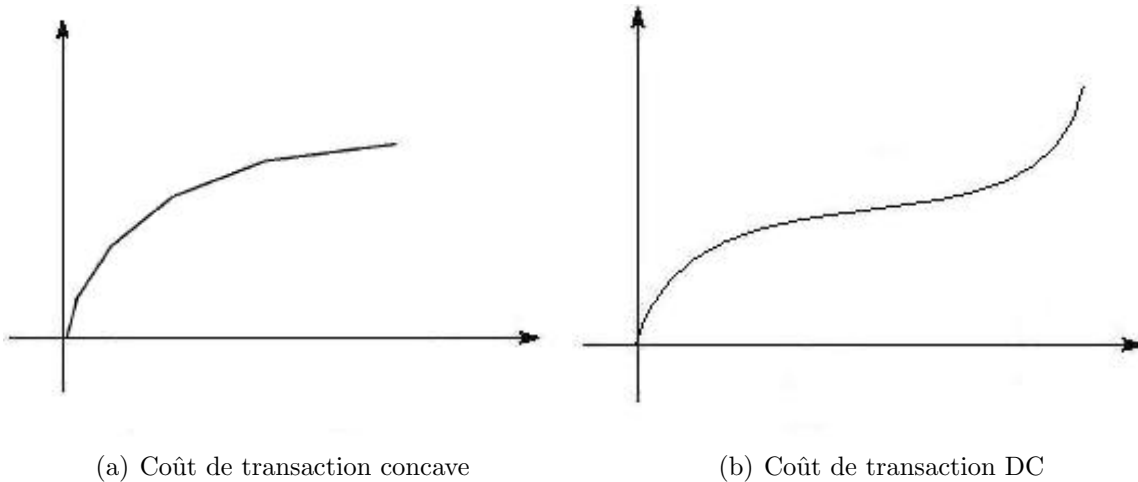


FIGURE 6.1 – Fonctions des coûts de transaction

Ici, nous considérons une forme particulière des coûts de transaction qui est utilisée en transactions sur internet [54]. Ce sont des coûts de transaction sous forme de fonctions en escalier (constantes par morceaux).

En général, les coûts de transaction associés au portefeuille  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  se définissent par la somme des coûts sur chaque actif [145] :

$$f(x) := \sum_{u=1}^n f_u(x_u)$$

où  $f_u(x_u)$  est la fonction des coûts de transaction sur l'actif  $u$ . Mathématiquement, les fonctions  $f_u$  ( $u = 1, \dots, n$ ) sont définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_u(x_u) = \begin{cases} \gamma_u^0 & \text{si } x_u \leq 0, & i = 0, \\ \gamma_u^i & \text{si } v_u^{i-1} < x_u \leq v_u^i, & i = 1, \dots, q(u) - 1, \\ \gamma_u^{q(u)} & \text{si } v_u^{q(u)-1} < x_u \leq +\infty, & i = q(u). \end{cases} \quad (6.6)$$

où  $V_u = \{0 = v_u^0 < v_u^1 < \dots < v_u^{q(u)} = \beta_u\}$  est l'ensemble fini des points pour lesquels la fonction  $f_u(x_u)$  est discontinue et  $0 = \gamma_u^0 < \gamma_u^1 < \dots < \gamma_u^{q(u)}$ . Clairement, la fonction  $f_u(x_u)$  est définie sur  $[0, \beta_u]$  et elle possède  $q(u)$  points de discontinuité (voir la Figure 6.2).

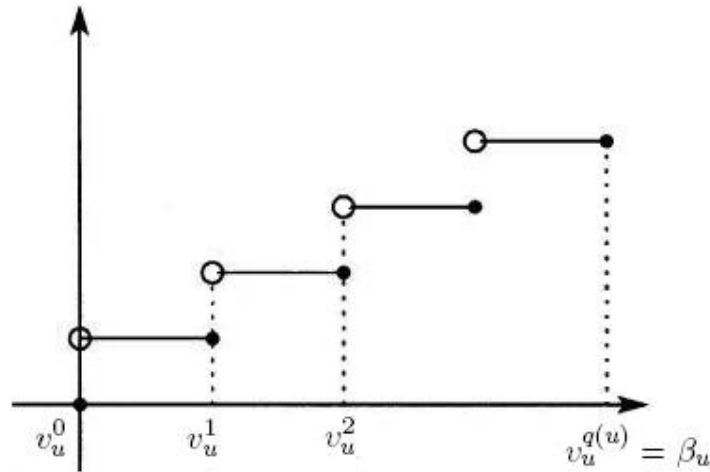


FIGURE 6.2 – Fonction des coûts de transaction non convexe et constante par morceaux

### 6.2.3 Le modèle de choix de portefeuille sous les coûts de transaction

Le rendement net du portefeuille  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  est

$$\sum_{u=1}^n \{r_u x_u - f_u(x_u)\},$$

où  $f_u(x_u)$  est une fonction en escalier définie par (6.6). Le modèle de choix de portefeuille sous les coûts de transaction s'explique par

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{u=1}^n \{r_u x_u - f_u(x_u)\} \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T (\phi_t + \psi_t)/T \leq wM, \\ \psi_t - \phi_t = \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u)x_u, \quad t = 1, \dots, T, \\ \phi_t \geq 0, \psi_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ \sum_{u=1}^n x_u = M, \\ 0 \leq x_u \leq \beta_u, \quad u = 1, \dots, n. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6.7)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons

$$\mathcal{D} := \left\{ \begin{array}{l} (x, \psi, \phi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^T \times \mathbb{R}^T : \\ \sum_{u=1}^n (r_{ut} - r_u)x_u + \phi_t - \psi_t = 0, \quad t = 1, \dots, T, \\ \sum_{t=1}^T (\psi_t + \phi_t)/T \leq wM, \sum_{u=1}^n x_u = M, \\ 0 \leq x_u \leq \beta_u, u = 1, \dots, n, \psi_t \geq 0, \phi_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \end{array} \right\}. \quad (6.8)$$

De cette manière la résolution du modèle (6.7) est équivalent à la résolution du modèle suivant :

$$(P) : \quad \min \left\{ f(x) := \sum_{u=1}^n f_u(x_u) - \sum_{u=1}^n r_u x_u : (x, \psi, \phi) \in \mathcal{D} \right\}.$$

Notre enjeu est de résoudre le problème (P).

#### 6.2.4 Formulation 0 – 1 du modèle de choix de portefeuille sous les coûts de transaction en escalier

Une formulation traditionnelle des problèmes avec des fonctions constantes (ou linéaires) par morceaux consiste en l'introduction de variables binaires. A chaque actif  $u$  et à chaque morceau  $i$ , une variable binaire,  $S_{ui}$ , est associée [60].

Soient  $0 = v_u^0 < v_u^1 < \dots < v_u^{q(u)} = \beta_u$  les points de discontinuité de la fonction  $f_u(x_u)$ . Soit  $f_u(x_u) = \gamma_u^i$  pour  $x_u \in (v_u^{i-1}, v_u^i]$  :  $i = 1, \dots, q(u)$  et posons  $f_u(v_u^0) = \gamma_u^0 = 0$ . De cette façon, la fonction des coûts de transaction en escalier se transforme en

$$f_u(x_u) = \sum_{i=1}^{q(u)} (\gamma_u^i - \gamma_u^{i-1}) S_{u,i-1}.$$

Pour obtenir  $f_u(x_u) = \gamma_u^i$  tel que  $x_u \in (v_u^{i-1}, v_u^i]$ , il nous faut

$$S_{uj} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \geq i, \\ 1, & \text{si } 0 \leq j < i. \end{cases} \quad (6.9)$$

Pour assurer ces conditions, il suffit d'ajouter les contraintes suivantes au modèle

$$[(x_u - v_u^i)/\beta_u] \leq S_{ui} \leq 1 + [(x_u - v_u^i)/\beta_u].$$

Ces relations assurent que pour tout  $u, i$

$$x_u > v_u^i \Rightarrow S_{ui} = 1 \quad \text{et} \quad x_u \leq v_u^i \Rightarrow S_{ui} = 0.$$

De cette façon, la formulation binaire du problème ( $P$ ) est :

$$(P_{bin}) : \begin{cases} \min \left( \sum_{u=1}^n \sum_{i=1}^{q(u)} (\gamma_u^i - \gamma_u^{i-1}) S_{u,i-1} - \sum_{u=1}^n r_u x_u \right) \\ \text{s.c.} : \begin{cases} (x, \psi, \phi) \in \mathcal{D}, \\ ((x_u - v_u^i)/\beta_u) \leq S_{ui} & : \forall i, \forall u, \\ S_{ui} \leq 1 + [(x_u - v_u^i)/\beta_u] & : \forall i, \forall u, \\ S_{ui} \in \{0, 1\} & : \forall i, \forall u. \end{cases} \end{cases}$$

Ce programme mixte 0 – 1 se résout par un algorithme de séparation et évaluation (SE) ou une méthode de coupe. Clairement, pour un problème de 1000 actifs et six morceaux, il nous faut 6000 variables binaires. Plus le nombre d'actifs est grand ou le nombre de morceaux est important, plus le problème est difficile à résoudre. Si nous utilisons une mesure de risque quadratique, le problème deviendra encore plus difficile [60]. Notre approche consiste d'abord à estimer les fonctions en escalier par la différence de fonctions convexes polyédrales, ensuite nous appliquerons la méthode DCA pour résoudre le problème approché.

## 6.3 Approximation des fonctions de coûts de transaction

Les fonctions de coûts de transactions sont non convexes et non-lisses. Pour que nous puissions utiliser DCA, les fonctions de coûts seront estimées par des fonctions DC polyédrales.

### 6.3.1 Approximation de la fonction $f_u$ par des fonctions DC polyédrales

Soient  $0 = v_u^0 < v_u^1 < \dots < v_u^{q(u)} = \beta_u$  les points de discontinuité de la fonction  $f_u(x_u)$ . Nous introduisons les points suivants

$$\tilde{v}_u^0, \tilde{v}_u^1, \dots, \tilde{v}_u^{q(u)-1}$$

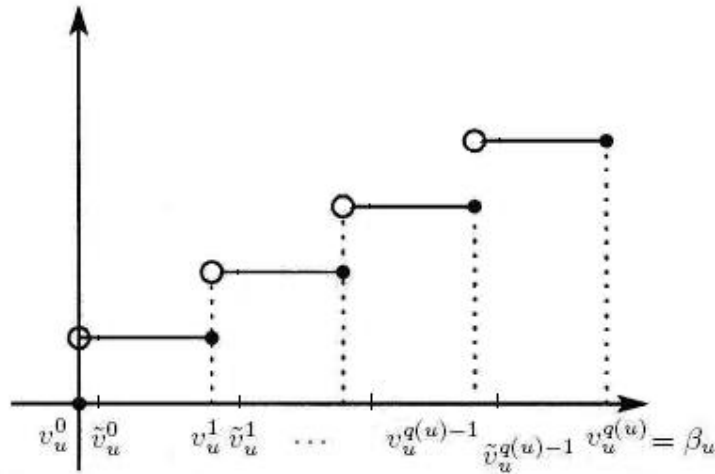


FIGURE 6.3 – Les points supplémentaires

tels que (voir la Figure 6.3)

$$0 = v_u^0 < \tilde{v}_u^0 < v_u^1 < \tilde{v}_u^1 < \dots < v_u^{q(u)-1} < \tilde{v}_u^{q(u)-1} < v_u^{q(u)} = \beta_u.$$

Soit  $\max\{\tilde{v}_u^i - v_u^i : i = 0, \dots, q(u) - 1\} \leq \eta$ , un nombre réel, positif et suffisamment petit. Nous définissons les fonctions convexes polyédrales  $L_u^i(x_u), i = 0, \dots, q(u)$  sur  $\mathbb{R}$  par (voir la figure 6.4)

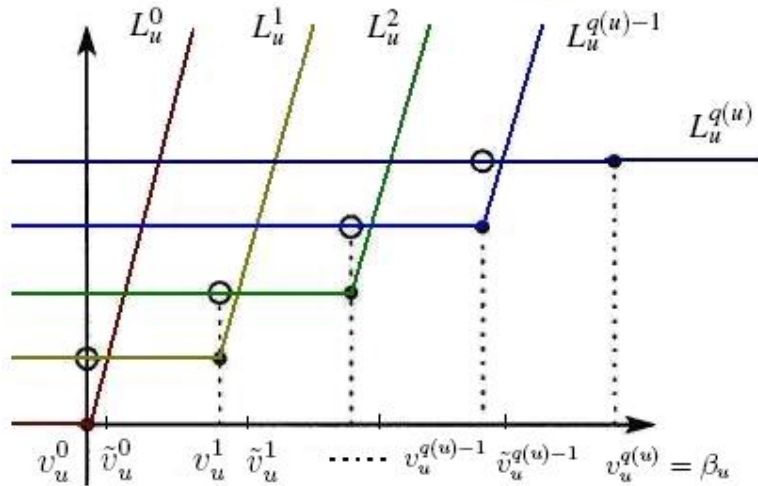


FIGURE 6.4 – Les fonctions convexes polyédrales



- $L_u^i$  est égale à  $\gamma_u^i$  sur l'intervalle  $] -\infty, v_u^i]$ , et elle est affine dans l'intervalle  $[v_u^i, +\infty[$  telle que  $L_u^i(v_u^i) = \gamma_u^i$  et  $L_u^i(\tilde{v}_u^i) = \gamma_u^{i+1}$  (avec  $c_u^i$  comme pente) pour tout  $i = 0, \dots, q(u) - 1$ ,
- $L_u^{q(u)}(x_u) = \gamma_u^{q(u)}$  pour tout  $x_u \in \mathbb{R}$ .

Considérons la fonction  $F_u(x_u)$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$F_u(x_u) = \begin{cases} L_u^i(x_u), & \text{si } v_u^{i-1} \leq x_u \leq v_u^i, \quad i = 1, \dots, q(u) - 1, \\ L_u^{q(u)}(x_u), & \text{si } v_u^{q(u)-1} \leq x_u. \end{cases} \quad (6.10)$$

pour  $u = 1, \dots, n$ .  $F_u(x_u)$  est une fonction linéaire par morceaux et elle sera utilisée pour estimer la fonction  $f_u(x_u)$ . En effet,  $F_u(x_u)$  est l'infimum des fonctions  $L_u^i, i = 0, \dots, q(u)$  (voir la figure 6.5), i.e.,

$$F_u = \min\{L_u^i : i = 0, \dots, q(u)\}$$

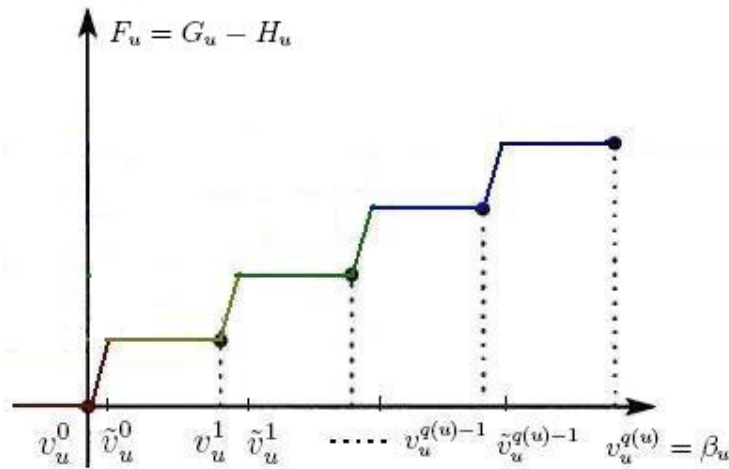


FIGURE 6.5 – Les fonctions linéaires par morceaux  $F_u(x_u)$

alors  $F_u(x_u)$  est aussi une fonction polyédrale. D'ailleurs, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} F_u &= \min_{i=0, \dots, q(u)} \{L_u^i\} = \min_{i=0, \dots, q(u)} \left\{ \sum_{j=0}^{q(u)} L_u^j - \sum_{j=0, j \neq i}^{q(u)} L_u^j \right\} = \min_{i=0, \dots, q(u)} \left\{ \sum_{j=0}^{q(u)} L_u^j + \sum_{j=0, j \neq i}^{q(u)} (-L_u^j) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{q(u)} L_u^j + \min_{i=0, \dots, q(u)} \left( \sum_{j=0, j \neq i}^{q(u)} -L_u^j \right) = \sum_{j=0}^{q(u)} L_u^j - \max_{i=0, \dots, q(u)} \left( \sum_{j=0, j \neq i}^{q(u)} L_u^j \right). \end{aligned}$$

Soient

$$G_u := \sum_{i=0}^{q(u)} L_u^i \quad \text{et} \quad H_u := \max_{i=0, \dots, q(u)} \left( \sum_{j=0, j \neq i}^{q(u)} L_u^j \right), \quad (6.11)$$

alors  $G_u$  et  $H_u$  sont des fonctions (finies) convexes polyédrales, de plus  $F_u = G_u - H_u$ . Cela veut dire que  $F_u(x_u)$  est une fonction DC polyédrale et une décomposition DC de  $F_u(x_u)$  est  $F_u = G_u - H_u$ .

Les définitions de  $G_u$  et  $H_u$  fournies par (6.11) se transforment aux formules suivantes par de simples calculs :

$$G_u(x_u) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q(u)} \gamma_u^i, & \text{si } x_u = v_u^0, \\ \sum_{j=0}^{i-1} c_u^j (x_u - v_u^j) + \sum_{i=0}^{q(u)} \gamma_u^i, & \text{si } v_u^{i-1} \leq x_u \leq v_u^i, 1 \leq i \leq q(u) - 1, \\ \sum_{j=0}^{q(u)-1} c_u^j (x_u - v_u^j) + \sum_{i=0}^{q(u)} \gamma_u^i, & \text{si } v_u^{q(u)-1} \leq x_u \leq v_u^{q(u)}, \end{cases} \quad (6.12)$$

et

$$H_u(x_u) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q(u)} \gamma_u^i, & \text{si } x_u \leq \tilde{v}_u^0, \\ \sum_{j=0}^{i-1} c_u^j (x_u - \tilde{v}_u^j) + \sum_{i=0}^{q(u)} \gamma_u^i, & \text{si } \tilde{v}_u^{i-1} \leq x_u \leq \tilde{v}_u^i, 1 \leq i \leq q(u) - 1, \\ \sum_{j=0}^{q(u)-1} c_u^j (x_u - \tilde{v}_u^j) + \sum_{i=0}^{q(u)} \gamma_u^i, & \text{si } \tilde{v}_u^{q(u)-1} \leq x_u \leq v_u^{q(u)}, \end{cases} \quad (6.13)$$

ou de façon plus contractée,

$$G_u(x_u) = \max\{a_u^i x_u + b_u^i : i = 0, \dots, q(u)\}, \quad \forall x_u \in \mathbb{R}, \quad (6.14)$$

où

$$a_u^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ \sum_{j=0}^{i-1} c_u^j & \text{si } i = 1, \dots, q(u), \end{cases}$$

et

$$b_u^i = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q(u)} \gamma_u^j & \text{si } i = 0, \\ \sum_{j=0}^{q(u)} \gamma_u^j - \sum_{j=0}^{i-1} c_u^j v_u^j & \text{si } i = 1, \dots, q(u). \end{cases}$$

De la même manière,

$$H_u(x_u) = \max\{\tilde{a}_u^i x_u + \tilde{b}_u^i : i = 0, \dots, q(u)\}, \quad \forall x_u \in \mathbb{R}, \quad (6.15)$$

où

$$\tilde{a}_u^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ \sum_{j=0}^{i-1} c_u^j & \text{si } i = 1, \dots, q(u), \end{cases}$$

alors  $a_u^i = \tilde{a}_u^i, \forall i = 0, \dots, q(u)$  et

$$\tilde{b}_u^i = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q(u)} \gamma_u^j & \text{si } i = 0, \\ \sum_{j=0}^{q(u)} \gamma_u^j - \sum_{j=0}^{i-1} c_u^j \tilde{v}_u^j & \text{si } i = 1, \dots, q(u). \end{cases}$$

### 6.3.2 Approximation de la fonction objectif de $(P)$

Après avoir estimé la fonction  $f_u(x_u)$  par la fonction DC polyédrale,  $F_u(x_u)$ , nous avons l'estimation suivante de la fonction objectif du programme  $(P)$

$$F(x, \psi, \phi) = \sum_{u=1}^n F_u(x_u) - \sum_{u=1}^n r_u x_u, \quad \forall (x_u, \psi_u, \phi_u) \in \mathbb{R}^{n+2T}$$

ou

$$F = (G - \sum_{u=1}^n r_u x_u) - H$$

avec les fonctions  $G$  et  $H$  qui sont deux fonctions (finies) convexes polyédrales sur  $\mathbb{R}^{n+2T}$  telles que, pour tout  $x = (x, \psi, \phi) \in \mathbb{R}^{n+2T}$ ,

$$G(x, \psi, \phi) := \sum_{u=1}^n G_u(x_u) \quad \text{et} \quad H(x, \psi, \phi) := \sum_{u=1}^n H_u(x_u).$$

Par la suite,  $F$  est une fonction DC polyédrale avec les composantes DC

$$(G(x, \psi, \phi) - \sum_{u=1}^n r_u x_u) \quad \text{et} \quad H(x, \psi, \phi).$$

Par conséquent, le programme suivant est une approximation du programme  $(P)$

$$(P_{DC}) : \quad \min \left\{ F(x, \psi, \phi) = \left( G(x, \psi, \phi) - \sum_{u=1}^n r_u x_u \right) - H(x, \psi, \phi) : (x, \psi, \phi) \in \mathcal{D} \right\}.$$

## 6.4 Résolution de $(P_{DC})$ par DCA

D'après le schéma général de DCA, la résolution de  $(P_{DC})$  exige la détermination de deux suites  $\{(x^k, \psi^k, \phi^k)\}$  et  $\{(y^k, \xi^k, \eta^k)\}$  telles qu'à chaque itération  $k = 0, 1, 2, \dots$  :

$$(x^k, \psi^k, \phi^k) \longrightarrow (y^k, \xi^k, \eta^k) \in \partial H(x^k, \psi^k, \phi^k)$$

$$(x^{k+1}, \psi^{k+1}, \phi^{k+1}) \in \partial \left( (G - \sum_{u=1}^n r_u x_u) + \chi_{\mathcal{D}} \right)^* (y^k, \xi^k, \eta^k)$$

( $\chi_{\mathcal{D}}$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $\mathcal{D}$ ).

### 6.4.1 Calcul de $\partial H(x, \psi, \phi)$

Puisque

$$H(x, \psi, \phi) := \sum_{u=1}^n H_u(x_u), \quad \forall (x, \psi, \phi) \in \mathbb{R}^{n+2T},$$

nous avons [42, 68]

$$\partial H(x, \psi, \phi) = \prod_{u=1}^n \partial H_u(x_u), \quad \forall (x, \psi, \phi) \in \mathbb{R}^{n+2T}. \quad (6.16)$$

En prenant en compte la définition de  $H_u(x_u)$  dans (6.15) nous aurons [42, 68]

$$\partial H_u(x_u) = \text{co}\{\tilde{a}_u^i : i = 0, \dots, q(u), \tilde{a}_u^i x_u + \tilde{b}_u^i = H_u(x_u)\}. \quad (6.17)$$

(*co* représente l'enveloppe convexe).

### 6.4.2 Calcul de $\partial \left( (G - \sum_{u=1}^n r_u x_u) + \chi_{\mathcal{D}} \right)^* (y^k, \xi^k, \eta^k)$

Contrairement au calcul de  $\partial H(x, \psi, \phi)$ , pour lequel nous disposons d'une formule explicite, le calcul de  $\partial \left( (G - \sum_{u=1}^n r_u x_u) + \chi_{\mathcal{D}} \right)^* (y^k, \xi^k, \eta^k)$  exige la minimisation de la fonction convexe polyédrale  $(G(x, \psi, \phi) - \sum_{u=1}^n r_u x_u) - \langle (x, \psi, \phi), (y^k, \xi^k, \eta^k) \rangle$  sur l'ensemble convexe et compact  $\mathcal{D}$  :

$$\min \left\{ G(x, \psi, \phi) - \sum_{u=1}^n r_u x_u - \langle (x, \psi, \phi), (y^k, \xi^k, \eta^k) \rangle : (x, \psi, \phi) \in \mathcal{D} \right\}.$$

Plus précisément

$$\min_{(x, \psi, \phi) \in \mathcal{D}} \left\{ \left( \sum_{u=1}^n \max_{i=0, \dots, q(u)} \{a_u^i x_u + b_u^i\} - r_u x_u \right) - \langle (x, \psi, \phi), (y^k, \xi^k, \eta^k) \rangle \right\}.$$

Puisque  $H_u$  dépend seulement de  $x_u$ , alors  $\xi_t^k = 0$ ,  $\eta_t^k = 0$ ,  $\forall k, \forall t$ , et finalement il nous faut résoudre le problème suivant afin de calculer  $(x^{k+1}, \psi^{k+1}, \phi^{k+1}) \in \partial \left( (G - \sum_{u=1}^n r_u x_u) + \chi_{\mathcal{D}} \right)^* (y^k, \xi^k, \eta^k)$  :

$$\min \left\{ \sum_{u=1}^n \max_{i=0, \dots, q(u)} \{a_u^i x_u + b_u^i\} - \sum_{u=1}^n (r_u + y_u^k) x_u : (x, \psi, \phi) \in \mathcal{D} \right\}. \quad (6.18)$$

Le problème (6.18) est équivalent au programme linéaire suivant

$$(LP^{k+1}) : \begin{cases} \min \left\{ \sum_{u=1}^n \tau_u - \sum_{u=1}^n (r_u + y_u^k) x_u \right\} \\ \text{s.c.} \begin{cases} a_u^i x_u + b_u^i \leq \tau_u, & i = 0, \dots, q(u), u = 1, \dots, n, \\ (x, \psi, \phi) \in \mathcal{D}, \\ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \end{cases}$$

Dans le sens où :

- Soit  $(x^*, \psi^*, \phi^*)$  une solution optimale de (6.18), alors  $(x^*, \psi^*, \phi^*, \tau^*)$ , où  $\tau_u^* = \max_{i=0, \dots, q(u)} \{a_u^i x_u + b_u^i\}$  pour tout  $u = 1, \dots, n$ , est une solution optimale de  $(LP)^{k+1}$ .
- Soit  $(x^*, \psi^*, \phi^*, \tau^*)$  une solution optimale de  $(LP)^{k+1}$  alors  $\tau_u^* = \max_{i=0, \dots, q(u)} \{a_u^i x_u + b_u^i\}$  pour tout  $u = 1, \dots, n$  et  $(x^*, \psi^*, \phi^*)$  est une solution optimale de (6.18).

### 6.4.3 Algorithme de DCA pour résoudre $(P_{DC})$

En utilisant les relations (6.16) et (6.18), l'algorithme DCA pour résoudre le problème  $(P_{DC})$  se résume ainsi

**Algorithme 6.1** *Algorithme de DCA*

**Initialisation :**

- Soit  $(x^0, \psi^0, \phi^0) \in \mathbb{R}^{n+2T}$  et  $k \geq 0$ .
- Choisir la tolérance  $\epsilon$  positive suffisamment petite.

**Répéter :**

- Calculer  $(y^k, \xi^k, \eta^k)$  via (6.16) et (6.17).
- Résoudre le programme linéaire  $(LP)^{k+1}$  afin de calculer  $(x^{k+1}, \psi^{k+1}, \phi^{k+1})$ .
- $k + 1 \leftarrow k$ .

**Jusqu'à :**  $F(x^k, \psi^k, \phi^k) - F(x^{k+1}, \psi^{k+1}, \phi^{k+1}) \leq \epsilon$ .

D'après le théorème de convergence de DCA, l'algorithme 6.1 s'arrête après un nombre fini d'itérations sur un point comme  $(x^*, \psi^*, \phi^*)$ .  $(x^*, \psi^*, \phi^*)$  est un point critique de  $(P_{DC})$ . Ce point est un minimum local de  $(P_{DC})$ , si  $\partial H(x^*, \psi^*, \phi^*)$  est un singleton. Une telle situation arrive presque tout le temps.

### 6.4.4 Trouver un bon point de départ pour DCA

Nous avons testé plusieurs points de départ  $(x^0, \psi^0, \phi^0)$  pour démarrer l'algorithme DCA :

- (i)  $(x^0, \psi^0, \phi^0) = (\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{\phi})$  où  $(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{\phi})$  est la solution optimale du problème relaxé de  $(P)$ . Le problème relaxé  $(P)$  se produit en sous-estimant les fonctions en escalier par leur enveloppe convexe.
- (ii) Soient  $(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{\phi})$  la solution optimale du problème relaxé de  $(P)$  et  $(x^0, \psi^0, \phi^0) := (x^0, \bar{\psi}, \bar{\phi})$ , où  $x_u^0$  est un des points de discontinuité de la fonction  $f_u(x_u)$ , i.e.  $\{v_u^0, v_u^1, \dots, v_u^{q(u)}\}$  tel que pour chaque  $u = 1, \dots, n$  :
- Soit  $\bar{x}_u \in [v_u^i, v_u^{i+1}]$ , où  $i \in \{0, \dots, q(u)\}$ .
  - Si  $\bar{x}_u \geq (v_u^i + v_u^{i+1})/2$  alors  $x_u^0 = v_u^{i+1}$  sinon  $x_u^0 = v_u^i$ .
- (iii)  $(x^0, \psi^0, \phi^0)$  est le vecteur zéro.

Le choix (ii) est choisi car les résultats correspondant sont les meilleurs.

## 6.5 Résolution globale du problème $(P)$

Pour évaluer la qualité des solutions fournies par DCA, nous avons utilisé des méthodes globales afin de résoudre le problème  $(P)$ . Une des méthodes de résolution globale du problème  $(P)$ , consiste à utiliser la formulation binaire de  $(P)$ , i.e.,  $(P_{bin})$ . Nous avons utilisé le logiciel CPLEX en version 10.1 pour le résoudre. Une autre méthode est d'utiliser l'algorithme par séparation et évaluation (SE) proposé par Konno et al. [60]. Cet algorithme utilise la résolution du problème relaxé de  $(P)$  pour trouver des bornes inférieures. Afin d'avoir le problème relaxé dans un intervalle comme  $[\underline{a}, \bar{b}]$ , nous remplaçons les fonctions en escalier par leur enveloppe convexe. Les enveloppes convexes s'obtiennent en faisant connecter les deux ou trois points comme c'est montré sur la figure 6.6. La borne supérieure est mise à jour si nous trouvons une meilleure solution au problème  $(P)$ . La séparation est faite sur l'intervalle qui porte l'écart le plus important entre l'enveloppe convexe et la fonction en escalier (voir la Figure 6.7). L'algorithme s'arrête dès qu'il trouve une solution  $\varepsilon$ -optimale, c'est-à-dire une solution pour laquelle l'écart entre la borne inférieure et la borne supérieure est inférieure à  $\varepsilon$ .

Afin d'améliorer la convergence de l'algorithme SE, nous avons développé une approche combinée de SE et DCA (SE-DCA). L'approche combinée (SE-DCA) essaie d'utiliser la performance de DCA et sa vitesse afin d'accélérer la convergence vers la solution globale. A chaque itération de SE, si les conditions sont favorables (par exemple, si la solution du sous-problème est très proche de la meilleure solution actuelle), SE fait appel à DCA. La solution du sous-problème est utilisée pour démarrer DCA. Le rôle de DCA est de trouver une solution améliorante. Une telle solution nous sert à améliorer la meilleure borne supérieure. Si la solution fournie par DCA n'est pas une solution améliorante, l'algorithme SE continue sa procédure jusqu'au prochain moment où il peut appeler DCA. L'approche SE-DCA s'arrête si elle trouve une solution  $\varepsilon$ -optimale.

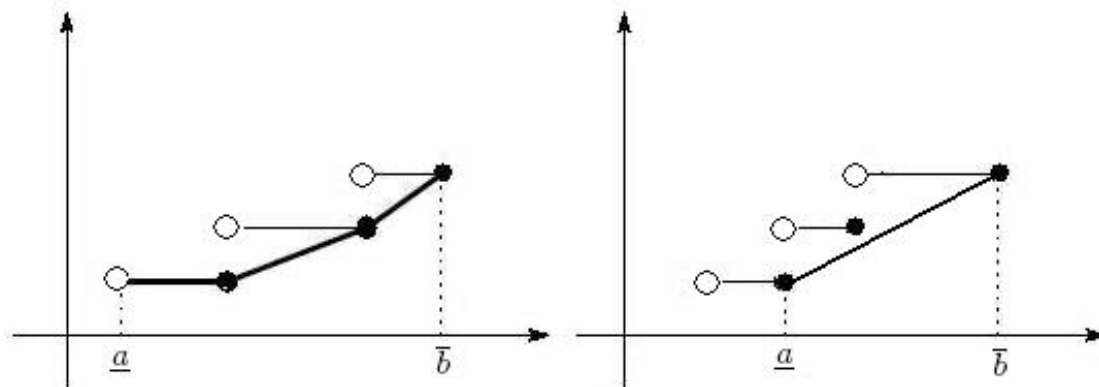


FIGURE 6.6 – Enveloppe convexe de fonction de coûts de transaction en escalier

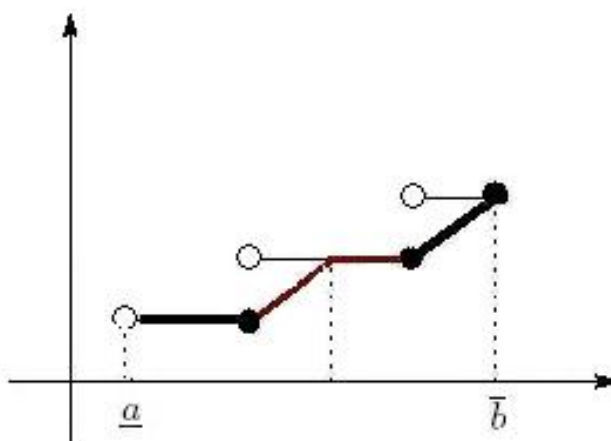


FIGURE 6.7 – Séparation sur un intervalle

## 6.6 Expériences numériques

Nous avons testé les algorithmes et les modèles sur trois jeux de données.

Le tableau 6.1 montre les coûts de transaction que nous avons considérés. Dans ce tableau, le coût de chaque transaction (achat) représente 1% de la borne supérieure de chaque intervalle. C'est-à-dire, si  $x_u \in (0.0, 2.0]$ , alors le coût de transaction est de 0.02 et ainsi de suite pour les autres intervalles. En pratique, les coûts supérieures à 1% de l'investissement ne sont pas très commun, mais quand il s'agit d'investissements étrangers (sur les marchés étrangers) le coût peut être supérieur à 1% du capital investi [114].

-	$v_u^0$	$(v_u^0, v_u^1]$	$(v_u^1, v_u^2]$	$(v_u^2, v_u^3]$	$(v_u^3, v_u^4]$	$(v_u^4, v_u^5]$	$(v_u^5, v_u^6]$	$(v_u^6, v_u^7]$
-	0.0	(0.0,2.0]	(2.0,4.0]	(4.0,6.0]	(6.0,8.0]	(8.0,10.0]	(10.0,12.0]	(12.0,14.0]
$\gamma_u^i :$	0.0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14

TABLE 6.1 – Les coûts de transaction

Le niveau de risque autorisé est  $w = 0.05$ . La précision ( $\epsilon$ ) des solutions est  $10^{-6}$  pour DCA. Pour tous les tests, les points  $\tilde{v}_u^i : i = 0, \dots, q(u) - 1, u = 1, \dots, n$  ont été définis par

$$\tilde{v}_u^i := v_u^i + 0.0001, \quad i = 0, \dots, q(u) - 1.$$

Nous avons testé les algorithmes pour les modèles à six et sept morceaux. Pour le premier jeu de données, la borne supérieure sur la proportion du capital investi dans l'actif  $u$  est de  $\beta_u = 14.0$  et le nombre de morceaux pour les fonctions de coût est de sept. Pour les autres jeux de données,  $\beta_u$  vaut 12.0 et le nombre de morceaux est de six.

Les tests ont été faits pour différentes valeurs du capital ( $M$ ). La motivation est de vérifier le comportement des algorithmes face aux différentes valeurs de  $M$ . En augmentant la valeur de  $M$ , nous nous attendons à ce que le problème devienne de plus en plus difficile. La raison est qu'il y a une limite sur les proportions du capital que nous pouvons investir dans chaque actif. Alors, il faut que l'algorithme distribue le capital entre plus d'actifs et de façon *efficace*.

Nous avons utilisé le logiciel CPLEX en version 10.1 pour résoudre le problème ( $P_{bin}$ ). Nous avons considéré deux conditions d'arrêt pour CPLEX. La première concerne l'écart entre les meilleures bornes supérieure et inférieure calculées par CPLEX, nous l'avons fixée à  $\epsilon := 10^{-3}$ . La seconde concerne le temps d'exécution du logiciel. La limite sur le temps est fixée à 1200 secondes pour le premier ensemble de données et 1000 secondes pour les autres.

Tous les algorithmes ont été codés en C++ et ils ont été testés sur un ordinateur Pentium IV CPU 3 GHz et 1 Go de RAM. A chaque itération de DCA, SE et SE-DCA nous avons utilisé le logiciel CPLEX en version 10.1 pour résoudre les sous-problèmes linéaires.

Le premier jeu de données correspond aux prix hebdomadaires des actifs en indice *S&P* 500. L'horizon débute à Mars 1992 et elle continue pendant 289 semaines. Le nombre d'actifs est 457. Ici,  $n$  vaut 457 et  $T$  est égale à 289. Les données sont disponibles sur le site "<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/indtrackinfo.html>".

Pour ces données, les algorithmes DCA et SE ont été utilisés. Nous avons mis deux critères d'arrêt pour SE. Le premier concerne l'écart entre les meilleures bornes inférieure et supérieure. Nous avons autorisé une marge de  $\epsilon := 10^{-3}$ . De plus, une limite de 900 itérations a été fixée sur le nombre maximum d'itérations. Nous avons choisi ce nombre, car chaque itération de SE exige 1.5 secondes pour résoudre un sous-problème. De cette façon, nous pouvons équilibrer les temps d'exécution de SE et CPLEX.

Le tableau 6.2 présente les résultats. Dans ce tableau, le nombre de sous-problèmes sondés par CPLEX (nodes), le nombre d'itération de SE et DCA (iter.), le temps de CPU en secondes



M	CPLEX			Séparation et Evaluation			DCA		
	nodes	Val. opt.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU
50	43300	0.017818	1208.840	88	0.016910	113.250	3	0.116416	3.297
60	41501	0.035766	1201.810	187	0.035137	244.734	2	0.055518	2.813
70	37301	0.055426	1200.940	900	0.058425	1139.719	2	0.074998	2.203
80	38301	0.074550	1201.300	31	0.074055	39.328	3	0.093639	3.422
90	37000	0.096650	1213.220	339	0.095012	433.468	3	0.154088	3.422
100	36501	0.116044	1207.390	900	0.135331	1151.859	2	0.155331	1.953

TABLE 6.2 – La performance des algorithmes pour le premier jeu de données (*S&P*)

(CPU) et les valeurs  $\epsilon$ -optimales (Val. opt.) pour chacun des algorithmes ont été présentés.

Le deuxième jeu de données correspond aux prix hebdomadaires des actifs de certaines compagnies américaines. Le nombre d'actifs est de 500. L'horizon débute le 27 décembre 2005 et elle continue pendant 20 semaines. Alors,  $n$  vaut 500 et  $T$  vaut 20. Les prix des actifs sont disponibles sur le site *YAHOO! FINANCE page* (<http://finance.yahoo.com>). Les rendements des actifs,  $r_{ut}$ , sont calculés par

$$r_{ut} = (p_{u,t+1} - p_{u,t})/p_{u,t},$$

où  $p_{u,t}$  et  $p_{u,t+1}$  sont le prix de l'actif  $u$  en deux instant successifs  $t$  et  $t + 1$  ( $u = 1, \dots, n$  et  $t = 1, \dots, T$ ).

Le tableau 6.3 montre le nombre de sous-problèmes sondés (nodes) par CPLEX pendant son exécution, le nombre d'itérations de SE et DCA (iter.), le temps d'exécution (CPU) en secondes et finalement les meilleures valeurs optimales (Val. opt.) fournies par les algorithmes et le logiciel CPLEX. Les valeurs optimales présentées dans le tableau ont été multipliées par  $(-1)$ .

L'algorithme SE s'arrête soit si son nombre d'itération dépasse la limite de 5000 itérations, soit lorsque l'écart entre les meilleures bornes inférieure et supérieure est plus petit que  $\epsilon := 10^{-3}$ .

Nous avons choisi le troisième jeu de données d'une grande dimension. Il correspond aux prix hebdomadaires des actifs en indice *Russell 3000*. Le nombre d'actifs est de 2151 et l'horizon considéré commence en Mars 1992 et dure 30 semaines. Les données sont disponibles sur le site "<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/indtrackinfo.html>". Ici,  $n$  vaut 2151 et  $T$  vaut 30.

Les algorithmes SE, DCA et SE-DCA ont été utilisés pour résoudre les problèmes. Également, le logiciel CPLEX a été utilisé. Le tableau 6.4 montre les résultats. A l'instar des autres tableaux, celui-ci présente le nombre de sous-problèmes sondés (nodes) par CPLEX pendant son exécution, le nombre d'itérations de SE et DCA (iter.), le temps d'exécution (CPU) en

M	CPLEX			Séparation et Evaluation			DCA		
	nodes	Val. opt.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU
10	146	0.723192	2.670	1370	0.721726	273.375	3	0.691447	0.750
20	510	1.509187	5.550	1252	1.509182	253.969	3	1.462120	0.609
30	1024	2.282747	17.240	5000	2.281142	990.844	3	2.239324	0.625
40	913	3.061181	14.480	1216	3.061173	247.828	3	2.979999	0.594
50	847	3.843308	15.170	3871	3.843130	756.719	3	3.830677	0.968
60	1483	4.610707	21.880	5000	4.610616	970.922	3	4.566408	0.593
70	869	5.367585	11.590	5000	5.367490	938.437	3	5.334487	0.594
80	338	6.092228	9.140	1589	6.090536	308.531	2	6.062314	0.453
90	201	6.806528	4.480	409	6.806510	79.250	2	6.806510	0.328
100	669	7.483239	18.630	5000	7.481416	841.282	3	7.478477	0.609
110	98	8.154372	4.310	467	8.152946	89.812	2	8.095418	0.344
120	901	8.785032	21.880	2139	8.784860	413.484	2	8.761774	0.360
130	541	9.403340	10.890	506	9.403320	99.047	3	9.363180	0.593
140	828	9.976866	17.580	4543	9.976844	871.765	3	9.964637	0.562
150	674	10.534156	15.950	1713	10.534136	333.281	2	10.526964	0.344
160	661	11.056510	16.860	976	11.056491	189.594	2	11.051380	0.344
170	1643	11.548996	36.020	2329	11.551624	440.672	3	11.551624	0.640
180	3362	12.000752	65.300	1079	12.000734	211.656	2	11.991416	0.329
190	27146	12.411932	497.050	2690	12.411772	504.266	3	12.393400	0.594
200	47483	12.820010	841.910	874	12.819989	166.843	2	12.813254	0.343
210	51601	13.219184	1003.200	2042	13.219160	388.860	2	13.205253	0.344
220	49801	13.599266	1000.030	635	13.599238	121.391	2	13.597422	0.343
230	48141	13.968100	1000.437	859	13.969617	164.140	3	13.939492	0.579
240	46301	14.332768	1000.594	2927	14.336082	565.375	3	14.297366	0.578
250	46901	14.701980	1000.469	1881	14.701948	361.203	3	14.674778	0.594

TABLE 6.3 – La performance des algorithmes pour le deuxième jeu de données

secondes et finalement les meilleures valeurs optimales (Val. opt.) fournies par les algorithmes et le logiciel CPLEX. De plus, le nombre des relances de DCA pendant l'exécution de SE-DCA (relance) y est inscrit.

L'algorithme SE s'arrête soit si son nombre d'itération est supérieur à 1000, soit lorsque l'écart entre les meilleures bornes inférieure et supérieure est plus petit que  $\epsilon := 10^{-3}$ . Puisque la taille des problèmes à résoudre est grande alors nous avons choisi 1000 comme limite au nombre d'itérations de SE pour que le temps maximum d'exécution de SE soit compatible avec celui de CPLEX.

Les valeurs optimales présentées ont été multipliées par  $(-1)$ .

Afin de vérifier l'influence des fonctions de coûts de transaction en escalier sur les portefeuilles optimaux et sur la complexité des modèles, nous avons résolu le modèle ( $P$ ) sans tenir en compte des coûts de transaction. Le logiciel CPLEX a été utilisé pour résoudre les problèmes respectifs. Nous avons utilisé les mêmes jeux de données présentés ci-dessus.

### 6.6.1 Commentaires sur les résultats

Aux vues des résultats présentés aux tableaux, nous constatons que

- DCA fournit des solutions de très bonne qualité dans un temps très court. Le nombre d'itération de DCA est 2 ou 3 pour tout les cas. Son temps d'exécution est inférieure à une seconde pour les deux premiers jeux de données. DCA donne les mêmes valeurs optimales que SE pour  $M = 90$  et  $M = 170$ . Le nombre d'itération de DCA est 2 et 3, respectivement.
- Plus  $M$  est grand, plus les problèmes sont difficiles à résoudre pour CPLEX. Au contraire, DCA est très stable en face des différentes valeurs de  $M$ .
- Pour le troisième jeu de données, les problèmes sont plus difficiles car le nombre d'actifs est très grand. CPLEX exige entre 70.890 et 1002.800 secondes pour résoudre les problèmes. Tandis que, DCA résout les problèmes en moins de 23 secondes pour toutes les différentes valeurs de  $M$ .
- Nous constatons que l'approximation *polyédrale* joue un rôle important dans l'efficacité de l'approche. Bien que l'algorithme SE et le logiciel CPLEX aient besoin de résoudre un nombre important des sous-problèmes pour atteindre les solutions, le nombre d'itération de DCA reste très faible. Pour tous les cas, nous avons besoin au maximum de 3 itérations pour résoudre le problème. La performance de DCA est peut-être plus visible dans l'approche combinée (SE-DCA). Pour les cas  $M = 200, 230, 250$ , les valeurs optimales fournies par l'approche combinée sont meilleurs que celles de CPLEX. De plus, dans la plupart des cas, SE-DCA donne des solutions de qualité supérieure par rapport aux solutions fournies par SE. D'ailleurs, pour  $M = 40, 200$ , SE-DCA s'arrête après avoir trouvé les solutions globales tandis que SE n'arrive pas à trouver les solutions dans la limite prévue.

M	CPLEX			Séparation et Evaluation			SE-DCA			DCA			
	nodes	Val. opt.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU	iter.	relevance	Val. opt.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU
10	1673	0.484134	70.890	1000	0.472324	1098.047	1000	13	0.472324	1181.563	3	0.444994	4.891
20	2902	1.045465	153.090	1000	1.044500	1108.750	1000	15	1.044500	1243.329	3	1.012359	16.359
30	1899	1.599846	210.440	1000	1.599750	1103.594	1000	20	1.599844	1263.985	3	1.486622	18.406
40	2939	2.152991	377.310	1000	2.149407	1109.656	748	11	2.152989	852.547	2	2.053807	11.875
50	7541	2.679210	1001.500	1000	2.672287	1111.171	1000	7	2.672287	1104.109	3	2.668101	7.672
60	7573	3.234320	933.330	1000	3.217419	1104.453	1000	10	3.229966	1183.828	3	3.144015	22.297
70	4851	3.763378	1001.030	1000	3.739001	1104.859	1000	5	3.739001	1142.141	3	3.700731	14.859
80	4301	4.286734	1002.800	1000	4.284365	1170.062	1000	8	4.284365	1140.172	3	4.228966	14.000
90	5111	4.822331	1001.770	1000	4.812887	1110.359	1000	13	4.813162	1204.875	3	4.672412	14.375
100	4001	5.351168	1002.300	1000	5.349740	1113.265	1000	6	5.351164	1114.219	2	5.313198	2.625
110	5741	5.858839	1000.050	1000	5.858831	1117.219	1000	20	5.858831	1185.531	3	5.706908	19.359
120	5441	6.331496	1001.300	1000	6.330285	1106.265	1000	5	6.331485	1096.328	3	6.245026	13.078
130	3337	6.782229	328.360	546	6.782217	623.062	546	11	6.782217	602.500	3	6.780472	3.890
140	4001	7.180542	1001.312	1000	7.176099	1098.563	1000	7	7.179158	1106.563	3	7.125709	4.094
150	3601	7.576792	1000.969	1000	7.571015	1101.610	1000	19	7.571015	1137.781	3	7.483173	15.688
160	4601	8.968668	1000.938	1000	7.967381	1090.890	1000	8	7.967381	1082.860	2	7.959605	2.078
170	2651	8.360978	1000.937	1000	8.352708	1084.703	1000	18	8.353377	1258.031	3	8.290695	18.016
180	1871	8.731364	1001.109	1000	8.730721	1086.047	1000	30	8.730808	1120.312	2	8.700640	8.000
190	4261	9.094636	1001.578	1000	9.085002	1087.828	1000	10	9.085002	1105.375	3	9.063879	14.578
200	2001	9.441358	1001.031	1000	9.431421	1072.047	346	4	9.450112	389.562	3	9.373741	3.812
210	2311	9.786790	1001.000	1000	9.778142	1083.344	1000	17	9.778174	1159.328	3	9.766231	12.234
220	2061	10.121934	1001.078	1000	10.114978	1092.594	1000	4	10.121141	1075.891	3	10.088907	4.906
230	3101	10.447622	1001.140	823	10.457530	889.812	823	4	10.457530	891.625	3	10.431347	4.843
240	1891	10.772840	1001.125	1000	10.762068	1083.859	1000	10	10.762720	1082.375	2	10.762068	1.984
250	1761	11.087680	1001.015	273	11.102833	295.375	273	3	11.102833	298.500	3	11.078073	4.828

TABLE 6.4 – La performance des algorithmes pour le troisième jeu de données (*Russell*)

M	CPLEX			Séparation et Evaluation			SE-DCA				DCA		
	nodes	Opt. val.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU	iter.	relance	Val. opt.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU
30	1899	1.59985	210.44	1000	1.59975	1103.59	1000	20	1.59984	1263.98	3	1.48662	18.41
40	2939	2.15299	377.31	1000	2.14941	1109.66	748	11	2.15299	852.55	2	2.05381	11.87
90	5111	4.82233	1001.77	1000	4.81289	1110.36	1000	13	4.81316	1204.87	3	4.67241	14.37
100	4001	5.35117	1002.30	1000	5.34974	1113.26	1000	6	5.35116	1114.22	2	5.31320	2.62
120	5441	6.33150	1001.30	1000	6.33028	1106.26	1000	5	6.33148	1096.33	3	6.24503	13.08
140	4001	7.18054	1001.31	1000	7.17610	1098.56	1000	7	7.17916	1106.56	3	7.12571	4.09
170	2651	8.36098	1000.94	1000	8.35271	1084.70	1000	18	8.35338	1258.03	3	8.29069	18.02
200	2001	9.44136	1001.03	1000	9.43142	1072.05	346	4	9.45011	389.56	3	9.37374	3.81
220	2061	10.12193	1001.08	1000	10.11498	1092.59	1000	4	10.12114	1075.89	3	10.08891	4.91
230	3101	10.44762	1001.14	823	10.45753	889.81	823	4	10.45753	891.62	3	10.43135	4.84
240	1891	10.77284	1001.12	1000	10.76207	1083.86	1000	10	10.76272	1082.37	2	10.76207	1.98

TABLE 6.5 – La performance des algorithmes pour le troisième jeu de données (*Russell*)

M	CPLEX		Séparation et Evaluation			SF-DCA				DCA		
	Opt. val.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU	iter.	relance	Val. opt.	CPU	iter.	Val. opt.	CPU
30	1.60	210.44	1000	1.60	1103.59	1000	20	1.60	1263.98	3	1.49	18.41
40	2.15	377.31	1000	2.15	1109.66	748	11	2.15	852.55	2	2.05	11.87
90	4.82	1001.77	1000	4.81	1110.36	1000	13	4.81	1204.87	3	4.67	14.37
100	5.35	1002.30	1000	5.35	1113.26	1000	6	5.35	1114.22	2	5.31	2.62
120	6.33	1001.30	1000	6.33	1106.26	1000	5	6.33	1096.33	3	6.24	13.08
140	7.18	1001.31	1000	7.18	1098.56	1000	7	7.18	1106.56	3	7.13	4.09
170	8.36	1000.94	1000	8.35	1084.70	1000	18	8.35	1258.03	3	8.29	18.02
200	9.44	1001.03	1000	9.43	1072.05	346	4	9.45	389.56	3	9.37	3.81
220	10.12	1001.08	1000	10.11	1092.59	1000	4	10.12	1075.89	3	10.09	4.91
230	10.45	1001.14	823	10.46	889.81	823	4	10.46	891.62	3	10.43	4.84
240	10.77	1001.12	1000	10.76	1083.86	1000	10	10.76	1082.37	2	10.76	1.98

TABLE 6.6 – La performance des algorithmes pour le troisième jeu de données (*Russell*)

### 6.6.2 Influence des fonctions de coût de transaction

Après avoir éliminé les fonctions de coût, le modèle ( $P$ ) devient très facile à résoudre. CPLEX résout le problème en moins d'une seconde. Ceci est le cas pour toutes les valeurs de  $M$  et pour les trois jeux de données testés. Si nous comparons les temps dont CPLEX a besoin pour résoudre le problème en présence des fonctions des coûts en escalier, nous constatons l'influence de ce type de fonctions sur la complexité du modèle.

En ce qui concerne les portefeuilles optimaux, l'inclusion des fonctions de coût les change. Le nombre d'actifs présents dans les portefeuilles optimaux sans les fonctions de coût est différent du nombre d'actifs en présence des fonctions de coût. La différence est plus remarquable pour le premier jeu de données. La figure 6.8 montre le nombre d'actifs dans les portefeuilles optimaux sans et avec les fonctions des coûts de transaction.

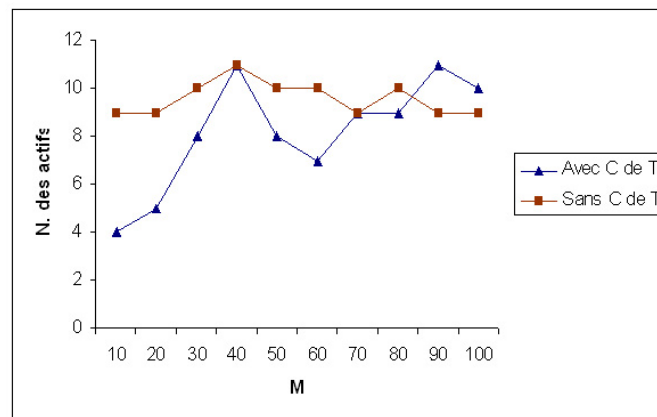


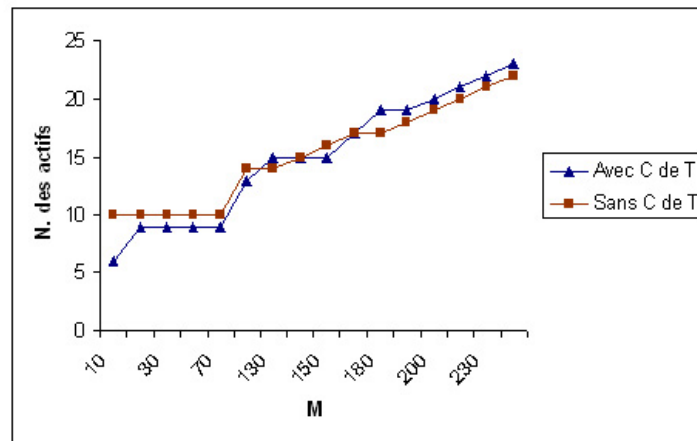
FIGURE 6.8 – Le nombre d'actifs composant le portefeuille, sans et avec les coûts de transaction

Pour le deuxième jeu de données, pour plus de la moitié des cas, les actifs composant les portefeuilles changent après que nous ajoutons les fonctions de coût. Dans tous les cas étudiés, les proportions du capital investi dans certains actifs changent. Les changements sont plus remarquables pour les cas où  $M$  est petit. Pour les tests avec de grandes valeurs de  $M$ , le nombre d'actifs composant les portefeuilles ne change pas considérablement. Pourtant, certains actifs sont remplacés par d'autres. La figure 6.9 montre les nombres d'actifs composant les portefeuilles pour les deuxième et troisième jeux de données. La figure montre seulement les cas où il y a un nombre différent d'actifs dans le portefeuille optimal. Par rapport au deuxième jeu de données, les tests sur le troisième jeu de données montrent une influence plus visible des fonctions de coût. Pour toutes les valeurs de  $M$  sauf  $M = 190$ , les compositions des portefeuilles optimaux changent.

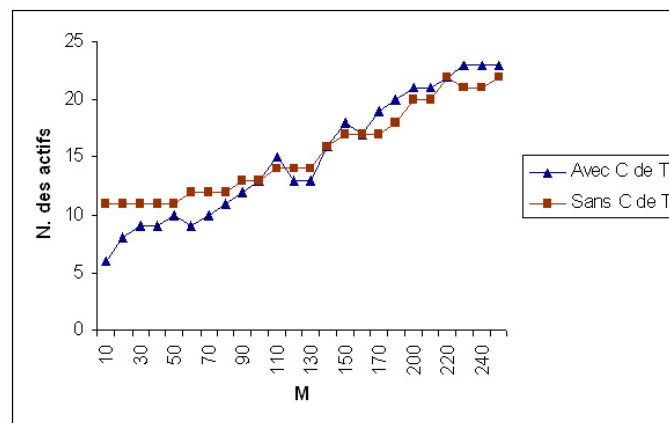
## 6.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé une approche locale et continue pour résoudre le problème de choix de portefeuille en présence des fonctions de coût de transaction en escalier. Les résultats numériques montrent que les solutions fournies par DCA sont de bonne qualité. La convergence finie de l'algorithme DCA est liée à l'approximation des fonctions de coûts par des fonctions DC *polyédrales*. Notre approche pourrait être utilisée dans les autres domaines où les fonctions en escalier rendent le problème difficile à résoudre.





(a) Le nombre d'actifs pour le deuxième jeu d'essai



(b) Le nombre d'actifs pour le troisième jeu d'essai

FIGURE 6.9 – Le nombre d'actifs composant le portefeuille, sans et avec les coûts de transaction



# Chapitre 7

## Une analyse au pire des cas pour l'investissement robuste en gestion de portefeuille en présence de contraintes de cardinalité

---

*Résumé* La plupart des modèles utilisés en gestion de portefeuille sont des modèles sensibles par rapport aux erreurs des entrées et des paramètres. Pour cela, plusieurs modèles basés sur la stratégie min-max ont été proposés. Les modèles min-max fournissent des solutions robustes par rapport à ces erreurs. Dans ce chapitre, nous présentons un modèle min-max permettant la prise en compte des contraintes de cardinalité. La méthode DCA est utilisée pour résoudre le modèle. Les résultats sont comparés avec ceux fournis par CPLEX. Les résultats montrent l'efficacité de notre approche par rapport à CPLEX.

---

### 7.1 Introduction

L'erreur d'estimation a toujours été reconnue comme un problème important dans la construction de portefeuille [10]. Une méthode pour attaquer ce problème consiste à utiliser les techniques d'optimisation robuste. Dans ce contexte, l'optimisation robuste essaie de minimiser le rendement du portefeuille et/ou maximiser le risque du portefeuille sous certaines contraintes tel que le résultat soit valable pour un niveau de confiance. Le modèle que nous avons étudié est une généralisation du modèle de Markowitz (voir [36] et [149]). La généralisation consiste à étudier l'analyse au pire des cas en ayant plusieurs matrices de covariance et plusieurs vecteurs de rendement moyen au lieu d'une seule matrice et un seul vecteur. De plus, le modèle offre la possibilité d'avoir des portefeuilles de benchmark. Ce sont des portefeuilles auxquelles l'investisseur essaie d'arriver. Enfin, le modèle contient certaines contraintes qui rendent le modèle plus réaliste. Il s'agit des contraintes de borne et de cardinalité ([16, 29, 51]). Ces contraintes limitent la proportion du capital investi dans chaque actif et le nombre d'actifs

composant le portefeuille. Le modèle est robuste, dans le sens où nous étudions un modèle *min-max* et les solutions d'un modèle min-max retournent les plus mauvaises stratégies d'investissement possibles, dans le sens où si une autre stratégie que celle du modèle min-max se réalise, l'investissement sera plus rentable. Pour cela, min-max parie sur plusieurs *scénarios* possibles ([36], [149]), où un scénario est une réalisation possible de chacun(e) de matrices de covariance ou de vecteurs de rendement. Plus précisément, une matrice de covariance est appelée un *scénario de risque* et chaque vecteur de rendement est nommé un *scénario de rendement*.

Le modèle min-max nous permet d'évaluer plusieurs cas simultanément et enfin de choisir celui qui est le pire. De cette façon, le portefeuille choisi est plus robuste, car nous sommes sûr que le portefeuille réalisé (dans le future) ne sera pas pire que celui prévu.

Notre modèle contient des contraintes de cardinalité. Ces contraintes avaient déjà été étudiées dans de nombreux articles et sur plusieurs modèles, comme le modèle MV, le modèle Déviation-Moyenne Absolue (MAD), etc. ([16, 29, 51, 61]). Pour la plupart des cas, les méthodes utilisées étaient des heuristiques. Ici, notre enjeu est d'utiliser la méthode DCA.

Le problème étudié s'exprime sous forme d'un programme avec la fonction objectif linéaire sous des contraintes linéaires et également des contraintes quadratiques. De plus, certaines variables de décision sont binaires. Après avoir utilisé un résultat de pénalité exacte (voir [105]), nous reformulons le modèle comme un modèle de programmation DC. Ensuite, nous utilisons DCA pour le résoudre.

Le reste du chapitre est organisé de façon suivante : la prochaine section concerne la description et la formulation du modèle. Le modèle sera généralisé en section 7.3, afin de prendre les contraintes de cardinalité en compte. En section 7.4, après avoir mis le problème sous forme d'un programme DC, nous utilisons DCA pour le résoudre. Les résultats numériques sont reportés dans la section 7.5. Nous terminons le chapitre par une conclusion.

## 7.2 Description et formulation

Dans cette section, nous allons d'abord présenter le modèle MV de Markowitz ([36], [112]). Les notations dont nous avons besoin pour le reste du chapitre sont présentées ci-dessous :

- $T$  : l'horizon de planning de portefeuille ;
- $n$  : le nombre d'actifs ;
- $\mathbf{r}_j \in \mathcal{R}^N, j = 1, \dots, J$  : les vecteurs de rendement ;
- $\Lambda_i \in \mathcal{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, I$  : les matrices de variance-covariance ;
- $\mathbf{x}$  : le vecteur des variables de décision ;
- $\bar{\mathbf{x}}_k \in \mathbb{R}^n : k = 1, \dots, K$  : les vecteurs de portefeuilles de benchmark ;
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  : la position actuelle de l'investisseur ;
- $\mathbf{c}_b, \mathbf{c}_s \in \mathbb{R}^n$  : les vecteurs qui représentent les coûts de transaction pour les achats et les ventes, respectivement ;

- $\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s$  : les variables de décision d'achat et de vente ;
- $\mathbf{z}$  : variables de décision (binaires),  $z_i = 1$  si l'actif  $i$  est inclus dans le portefeuille et 0 sinon ;
- $\tau$  : le coût total des transactions (achat et vente) ;
- $\mu, \nu$  : les pires valeurs de rendement et de risque ;
- $l_i, u_i$  : les bornes inférieure et supérieure sur la proportion du capital investi dans l'actif  $i$  ;
- $card$  : le paramètre de cardinalité qui représente le nombre souhaité d'actifs composant le portefeuille ;
- $\alpha$  : le paramètre d'aversion au risque ;
- $\mathbf{1} \equiv (1, \dots, 1)^t$ .

### 7.2.1 Modèle MV

Le modèle MV de Markowitz considère un portefeuille de  $n$  actifs défini en terme d'un ensemble des poids  $x_i$  tels que  $i = 1, \dots, n$ . Ce sont des proportions du capital qui doit être distribué parmi les actifs. La somme de toutes les proportions doit être égale à 1, i.e.,

$$\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1.$$

Si l'investisseur détient actuellement des actifs  $1, \dots, n$ , alors le vecteur  $\mathbf{p}$  (tel que  $\mathbf{1}\mathbf{p} = 1$ ) représente sa position actuelle. Par contre, s'il ne possède aucun actif (mais, souhaite acheter), alors  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ . La répartition du budget initial (de 1) peut être représentée par les contraintes suivantes :

$$\mathbf{p} + \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_s = \mathbf{x}.$$

Soit  $\tau$  les coûts totaux de transaction que l'investisseur engage pour son investissement [114]. Ceci considère les coûts totaux que l'investisseur doit payer pour que sa position actuelle  $\mathbf{p}$  se transforme à  $\mathbf{x}$ . Les coûts correspondant aux  $\mathbf{x}_b$  et  $\mathbf{x}_s$  sont  $\mathbf{c}_b$  et  $\mathbf{c}_s$ , autrement dit

$$\mathbf{c}_b^t \mathbf{x}_b + \mathbf{c}_s^t \mathbf{x}_s = \tau.$$

Le rendement espéré (attendu) du portefeuille est  $(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{r}$  et le risque est mesuré par  $(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \Lambda (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t$ . Il n'y a qu'une seule matrice de variance-covariance. Par conséquent, le modèle MV se formule comme un problème de programmation quadratique

(MV) :

$$\min \alpha (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \Lambda (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) - (1 - \alpha) [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \mathbf{r} - \tau]$$

s.c.

$$\mathbf{p} + \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_s = \mathbf{x},$$

$$\mathbf{c}_b^t \mathbf{x}_b + \mathbf{c}_s^t \mathbf{x}_s = \tau,$$

$$\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1,$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s \geq \mathbf{0}.$$

où le paramètre  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) détermine le niveau d'aversion au risque. En faisant varier  $\alpha$  entre 0 et 1, nous obtenons l'ensemble de toutes les stratégies d'investissement efficace.  $\alpha = 0$  correspond à la position riscophile et  $\alpha = 1$  est la position totalement riscophobe.

La solution optimale du modèle (MV) est très sensible par rapport aux paramètres d'entrée du modèle. La moindre erreur d'estimation dans la matrice de covariance et/ou le vecteur de rendement se traduirait par une fausse solution. Plus particulièrement s'il s'agit d'une re-balancement de portefeuille, les erreurs peuvent faire engager l'investisseur à grandes valeurs de coûts de transaction [18]. Ces arguments nous encouragent à étudier les modèles pour lesquels les solutions optimales sont relativement moins sensibles à l'égard des erreurs éventuelles.

### 7.2.2 Modèle min-max pour les décisions robustes

Supposons qu'un investisseur est indécis entre plusieurs matrices de variance-covariance et/ou entre plusieurs vecteurs de rendements. Autrement dit, il existe un ensemble de matrices de covariance comme  $\Lambda_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, I$  et un ensemble de vecteurs de rendement moyen comme  $\mathbf{r}_j \in \mathcal{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, J$ . De plus, soit  $K$  le nombre de portefeuilles de benchmark. Nous supposons qu'aucun(e) vecteur (matrice) n'a plus d'importance que les autres, même s'il y a des différences entre eux (elles). De cette façon, l'investisseur n'a aucun moyen de distinguer ces choix. Une représentation contractée du modèle min-max est donnée par

$$\min_{\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \left\{ \alpha \cdot \max_{i,k} \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)\} - (1 - \alpha) \min_{j,k} \{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - t(\mathbf{x})\} \right\} \quad (7.1)$$

avec  $i = 1, \dots, I$ ,  $j = 1, \dots, J$  et  $k = 1, \dots, K$ . La fonction  $t(\mathbf{x})$  représente les coûts de transaction que l'investisseur doit payer s'il veut changer sa stratégie de  $\mathbf{p}$  à  $\mathbf{x}$ , en effet

$$t(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_b^t \mathbf{x}_b + \mathbf{c}_s^t \mathbf{x}_s.$$

Afin de résoudre (7.1), nous introduisons des variables  $\mu$  et  $\nu$  telles que :

$$\mu := \min_{j,k} [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - t(\mathbf{x})] \quad \text{et} \quad \nu := \max_{i,k} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k).$$

De cette manière,  $\mu$  représente le pire rendement possible et  $\nu$  correspond à la pire valeur possible du risque. En utilisant les nouvelles variables, le modèle (7.1) se transforme à

$$\begin{aligned}
(MMX) : \\
\min \quad & \alpha\nu - (1 - \alpha)\mu \\
s.c. \quad & \\
& \mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \\
& \mathbf{p} + \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_s = \mathbf{x}, \\
& \mathbf{c}_b^t \mathbf{x}_b + \mathbf{c}_s^t \mathbf{x}_s = \tau, \\
& (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k) \leq \nu \quad : i = 1, \dots, I, k = 1, \dots, K, \\
& (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - \tau \geq \mu \quad : j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K, \\
& \mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Au total, il y a  $IK$  contraintes quadratiques,  $JK+n+2$  contraintes linéaires et les contraintes de non-négativité.

### 7.2.3 Robustesse du modèle min-max

La robustesse est une propriété de base des conditions d'optimalité pour les modèles min-max [36]. Soit

$$\mathbf{x}^* := \operatorname{argmin}_{\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \left\{ \alpha \cdot \max_{i,k} \{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k) \} - (1 - \alpha) \min_{j,k} \{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - t(\mathbf{x}) \} \right\}$$

et

$$\Phi(\mathbf{x}^*) := \min_{\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \left\{ \alpha \cdot \max_{i,k} \{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k) \} - (1 - \alpha) \min_{j,k} \{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - t(\mathbf{x}) \} \right\},$$

alors

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{x}^*) &\equiv \min_{\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \left\{ \alpha \cdot \max_{i,k} \{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k) \} \right. \\
&\quad \left. - \min_{\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}} \left\{ (1 - \alpha) \min_{j,k} \{ (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - t(\mathbf{x}) \} \right\} \right\} \\
&= \alpha \cdot \max_{i,k} \{ (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k) \} - (1 - \alpha) \min_{j,k} \{ (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - t(\mathbf{x}^*) \} \\
&\geq \alpha \cdot \{ (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k) \} - (1 - \alpha) \{ (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - t(\mathbf{x}^*) \}, \forall i, j, k.
\end{aligned}$$

L'inégalité indique la non-infériorité de la stratégie min-max. Autrement dit, la performance attendue est garantie et elle satisfait les conditions au pire des cas et nous aurions une meilleure solution si un scénario différent du au de pire des cas soit réalisé.

### 7.3 Contraintes de cardinalité

Les contraintes de cardinalité ont pour objet de contrôler le nombre d'actifs composant le portefeuille optimal. Ces contraintes exigent les contraintes de bornes sur les actifs. Ce sont les contraintes qui limitent les proportions du capital investi dans chaque actif. Soient  $l_i$  et  $u_i$  les bornes inférieure et supérieure sur l'actif  $i$ . Les contraintes de bornes sont :

$$l_i z_i \leq w_i \leq u_i z_i, \quad z_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où  $z_i$  est une variable binaire et elle est égale à 1 si l'actif  $i$  est inclus dans le portefeuille et 0 sinon. La contrainte de cardinalité est

$$\sum_{i=1}^n z_i = \text{card},$$

où  $\text{card}$  est le paramètre de cardinalité qui représente le nombre d'actifs qui composent le portefeuille.

Après avoir ajouté les contraintes de cardinalité et de bornes au modèle ( $MMX$ ), nous obtenons le modèle suivant

( $P_{\text{card}}$ ) :

$$\min \alpha \nu - (1 - \alpha) \mu$$

s.c.

$$\mathbf{1}^t \mathbf{x} = 1, \tag{7.2}$$

$$\mathbf{p} + \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_s = \mathbf{x}, \tag{7.3}$$

$$\mathbf{c}_b^t \mathbf{x}_b + \mathbf{c}_s^t \mathbf{x}_s = \tau, \tag{7.4}$$

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k) \leq \nu \quad : i = 1, \dots, I, k = 1, \dots, K, \tag{7.5}$$

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - \tau \geq \mu \quad : j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K, \tag{7.6}$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = \text{card}, \tag{7.7}$$

$$l_i z_i \leq x_i \leq u_i z_i \quad : i = 1, \dots, n, \tag{7.8}$$

$$z_i \in \{0, 1\} \quad : i = 1, \dots, n, \tag{7.9}$$

$$\mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s \geq \mathbf{0}. \tag{7.10}$$

Dans le modèle ( $P_{\text{card}}$ ), il y a au total  $IK$  contraintes quadratiques,  $JK + 3n + 3$  contraintes linéaires et les contraintes de non-négativité, ainsi que  $n$  variables binaires. Notons que ( $P_{\text{card}}$ ) est un modèle général pour lequel toutes les informations ne sont pas forcément nécessaires ou disponibles. Par exemple, si  $K = 0$ , il n'y aura plus de portefeuille de benchmark et  $\bar{\mathbf{x}}_k$  peut être supprimé. Si  $I = 0$ , les contraintes quadratiques seront éliminées. De la même manière, si  $J = 0$ , les contraintes (7.6) seront supprimées du modèle. De plus, si nous ne disposons d'aucune information sur les coûts de transaction, nous pouvons négliger les contraintes (7.3) et (7.4), ainsi que les variables  $\tau, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s$ .



## 7.4 Programmation DC et DCA pour la résolution du problème

### 7.4.1 Reformulation

Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{4n+3}$  l'ensemble de tous les points  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathbb{R}^{4n+3}$  satisfaisant  $\mathbf{0} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{1}$  et toutes les contraintes du modèle ( $P_{card}$ ) à l'exception des contraintes (7.9).

Nous définissons

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) := \sum_{i=1}^n z_i(1 - z_i).$$

Clairement,  $f$  est une fonction concave et non-négative sur l'ensemble  $\mathcal{A}$ . D'ailleurs, le problème ( $P_{card}$ ) s'écrit

$$\begin{aligned} & \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathcal{A} : z_i \in \{0, 1\} : i = 1, \dots, n\} \\ & = \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathcal{A} : f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) = 0\} \\ & = \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathcal{A} : f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Alors nous pouvons exprimer le modèle ( $P_{card}$ ) sous forme suivante

$$\min\{V(\mu, \nu) := \alpha\nu - (1 - \alpha)\mu : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathcal{A}, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \leq 0\}. \quad (7.11)$$

La fonction objectif du modèle (7.11) est convexe. De plus,  $\mathcal{A}$  est un ensemble convexe et borné alors d'après [105], il existe  $\sigma_0 \geq 0$  tel que pour tout  $\sigma > \sigma_0$ , le programme (7.11) est équivalent au

$$\min\{F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) := \alpha\nu - (1 - \alpha)\mu + \sigma \sum_{i=1}^n z_i(1 - z_i) : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathcal{A}\}. \quad (7.12)$$

La fonction  $F$  est convexe (linéaire) par rapport aux variables  $\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mu, \nu, \tau$  et concave par rapport aux variables  $\mathbf{z}$ . Par conséquent,  $F$  est une fonction DC polyédrale. Une formulation naturelle de (7.12) est

$$(P_{DC}) : \quad \min\{g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) - h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathbb{R}^{4n+3}\},$$

où

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) := \chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau)$$

et

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) := (1 - \alpha)\mu - \alpha\nu + \sigma \sum_{i=1}^n z_i(z_i - 1).$$

Ici,  $\chi_{\mathcal{A}}$  est la fonction indicatrice sur  $\mathcal{A}$ , i.e.

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathcal{A}, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 7.4.2 Résolution de $(P_{DC})$ par DCA

Selon le schéma général de DCA, il nous faut d'abord calculer le sous-gradient de la fonction  $h$  définie par  $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) := (1 - \alpha)\mu - \alpha\nu + \sigma \sum_{i=1}^n z_i(1 - z_i)$ . Le sous-gradient de  $h$  est

$$\mathbf{u}^l \in \partial h(\mathbf{x}^l, \mathbf{x}_b^l, \mathbf{x}_s^l, \mathbf{z}^l, \mu^l, \nu^l, \tau^l) \Leftrightarrow u_i^l = \begin{cases} \sigma(2z_{i-3n}^l - 1) & : si \quad i = 3n + 1, \dots, 4n, \\ (1 - \alpha) & : si \quad i = 4n + 1, \\ -\alpha & : si \quad i = 4n + 2, \\ 0 & : sinon. \end{cases} \quad (7.13)$$

Ensuite, il nous faut résoudre le programme suivant :

$$\min\{-\langle (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau), \mathbf{u}^l \rangle : (\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) \in \mathcal{A}\}. \quad (7.14)$$

La solution optimale de ce programme linéaire sera  $(\mathbf{x}^{l+1}, \mathbf{x}_b^{l+1}, \mathbf{x}_s^{l+1}, \mathbf{z}^{l+1}, \mu^{l+1}, \nu^{l+1}, \tau^{l+1})$ . L'algorithme DCA pour résoudre  $(P_{DC})$  se résume ainsi

#### Algorithme 7.1 Algorithme de DCA

##### Initialisation :

- Choisir  $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}_b^0, \mathbf{x}_s^0, \mathbf{z}^0, \mu^0, \nu^0, \tau^0) \in R^{4n+3}$  et  $l = 0$ .
- Choisir la tolérance  $\varepsilon$  positive et suffisamment petite.
- Choisir le paramètre de pénalité  $\sigma$  positive suffisamment grand.

##### Répéter

- Calculer  $\mathbf{u}^l \in \partial h(\mathbf{x}^l, \mathbf{x}_b^l, \mathbf{x}_s^l, \mathbf{z}^l, \mu^l, \nu^l, \tau^l)$  via (7.13).
- Calculer  $(\mathbf{x}^{l+1}, \mathbf{x}_b^{l+1}, \mathbf{x}_s^{l+1}, \mathbf{z}^{l+1}, \mu^{l+1}, \nu^{l+1}, \tau^{l+1}) \in \partial g^*(\mathbf{u}^l)$  en résolvant le programme linéaire (7.14).
- $l + 1 \leftarrow l$ .

**Jusqu'à**  $\|(\mathbf{x}^{l+1}, \mathbf{x}_b^{l+1}, \mathbf{x}_s^{l+1}, \mathbf{z}^{l+1}, \mu^{l+1}, \nu^{l+1}, \tau^{l+1}) - (\mathbf{x}^l, \mathbf{x}_b^l, \mathbf{x}_s^l, \mathbf{z}^l, \mu^l, \nu^l, \tau^l)\| \leq \varepsilon$ .

D'après le théorème de convergence de DCA, l'algorithme 7.1 a une convergence finie pour résoudre le programme  $(P_{DC})$ .

## 7.5 Expériences numériques

Afin d'évaluer la qualité des solutions fournies par DCA, nous les avons comparées avec les solutions optimales de  $(P_{card})$ . Nous avons utilisé le logiciel CPLEX en version 10.1 pour résoudre le programme  $(P_{card})$ .

L'algorithme DCA a été codé en C++ et a été testé sur un ordinateur Pentium IV 3 GHz et 1 Go RAM. Le logiciel CPLEX en version 10.1 a été utilisé pour résoudre les sous-problèmes linéaires (sous des contraintes quadratiques).

Le choix du paramètre de pénalité, i.e.  $\sigma$ , est important pour que nous puissions établir l'équivalence entre les problèmes ( $P_{card}$ ) et ( $P_{DC}$ ). Le paramètre doit être choisi de façon que la partie de la fonction de pénalité i.e.,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_s, \mathbf{z}, \mu, \nu, \tau) := \sum_{i=1}^n z_i(1 - z_i)$$

au programme ( $P_{DC}$ ) ne soit pas trop favorisée, car dans le cas contraire les solutions ne seront pas de bonne qualité. Pour nos expériences,  $\sigma$  est égal à 1.0. Pour cette valeur, DCA trouve toujours des solutions qui sont admissibles au modèle ( $P_{card}$ ).

## Recherche d'un bon point initial pour DCA

Nous avons testé plusieurs choix de point initial, comme

- La solution optimale du problème relaxé de ( $P_{card}$ ), pour obtenir le problème relaxé, il suffit de remplacer les contraintes (7.9) par  $0 \leq z_i \leq 1$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .
- Après avoir résolu le modèle relaxé de ( $P_{card}$ ), nous fixons les variables binaires non nulles à 1.
- Après avoir résolu le modèle relaxé de ( $P_{card}$ ), nous fixons toutes les variables binaires à 1.

Les résultats obtenus par le premier choix sont mieux que ceux obtenus par les autres choix.

## Générer les scénarios de risque

Les scénarios de risque peuvent être générés de différentes façons. Nous avons d'abord considéré un horizon de temps, et après nous l'avons divisée en plusieurs sous-intervalles de temps. Ensuite, nous avons calculé les matrices de covariance sur chacun des intervalles. Ce sont les scénarios de risque que nous avons adoptés.

Il existe des méthodes plus sophistiquées pour générer les scénarios de risque telles que les modèles ARCH-GARCH et bootstrap ([36], [37]).

## Générer les scénarios de rendement

Les scénarios de rendement ont été générés par une approche basée sur la simulation probabilistique. Cette approche construit un arbre dont chaque nœud contient un cluster (groupe) des scénarios (qui sont des vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$ ). Parmi les scénarios, il y en a un qui est le scénario central (centroid). L'arbre final consiste en l'ensemble des scénarios centraux (centroid) de chaque nœud ainsi que l'ensemble de certaines arrêtes qui relient les nœuds.

Le schéma de base de cette approche se résume (voir aussi [38]) :

**Algorithme 7.2** (*Algorithme pour générer les scénarios de rendement*)

**Initialisation** : Créer un nœud de racine à  $N$  scénarios. Initialiser chaque scénario par des prix (au temps 0) d'actifs. Construire une queue et ajouter le nœud racine à la queue.

**Simulation** : Prendre un nœud de la queue et l'en éliminer. Faire une simulation sur une seule période  $([t, t + 1] : t = 0, \dots, T)$  pour chaque scénario du nœud. Il existe deux sortes de simulation : parallèle et séquentielle.

**Choix des graines randomisées** : Nous choisissons certains scénarios comme des graines de façon aléatoire. Ce sont les scénarios autour desquels les autres scénarios seront regroupés.

**Regroupement des scénarios** : Nous regroupons les scénarios autour des graines, de façon que les scénarios qui se trouvent dans le même groupe soient les scénarios les plus proches d'une graine précise.

**Sélection des scénarios** : Pour chaque groupe, nous définissons un centre et nous choisissons le scénario qui est le plus proche du centre du groupe.

**Mise en queue** : Nous attribuons un enfant à chaque groupe (cluster) avec une probabilité proportionnelle au nombre de scénarios dans le groupe (cluster). Si les nœuds enfants ne sont pas des nœuds finaux, alors ajoutez-les à la queue. Si la queue n'est pas vide, aller à l'étape Simulation ; sinon arrêter l'algorithme.

**Les autres paramètres**

D'après le modèle (MMX), il existe d'autres paramètres que les scénarios de rendement et de risque, comme les coûts de transaction, et les portefeuilles de benchmark, etc. Nous avons fixé les coûts de transaction à 0.1% de chaque transaction que ce soit l'achat ou la vente. Les bornes inférieure et supérieure sur la proportion du capital investi dans chaque actif sont fixées à 0.01 et 1.0, respectivement. Nous avons considéré un seul portefeuille de benchmark, i.e.  $K = 1$  et de plus nous avons mis  $\bar{x}_{k_i} = 1.0/n$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Nous n'avons considéré aucun portefeuille initial, c'est-à-dire  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ . Le nombre de scénarios de rendement est égal à 10 et de risque est égal à 1. Les informations (les prix) sur les actifs ont été recueillies sur le site de Yahoo! Finance. Elles correspondent aux prix mensuels de 98 actifs financiers depuis 121 mois. Plus précisément, le début de l'horizon est le mois d'août 1997 et dure 10 ans.

L'algorithme a été codé en C++ et il a été testé sur un ordinateur Pentium IV CPU 3 GHz et 1 Go de RAM. A chaque itération de DCA, nous avons utilisé le logiciel CPLEX

en version 10.1 pour résoudre les sous-problèmes linéaires (sous les contraintes linéaires et quadratiques).

### 7.5.1 Résultats numériques

L'importance du travail est liée à la présence des contraintes de cardinalité et au caractère min-max du modèle qui garantit la robustesse des résultats. Afin de pouvoir étudier ces deux aspects du modèle, les tests ont été effectués par rapport aux différentes valeurs de deux paramètres. Il s'agit du paramètre de cardinalité (*card*) et du paramètre d'aversion au risque ( $\alpha$ ). En fixant un de ces paramètres et en faisant varier l'autre, nous avons d'abord étudié l'efficacité de l'approche DCA pour résoudre le problème; ensuite nous avons pu étudier l'influence de plusieurs scénarios au lieu d'un seul.

Afin de vérifier l'efficacité de DCA et la qualité des solutions fournies par DCA, nous avons résolu le problème ( $P_{card}$ ) par le logiciel CPLEX en version 10.1. CPLEX trouve des solutions raisonnables au bout de vingt minutes c'est la raison pour laquelle nous avons fixé une limite de 1200 secondes sur le temps d'exécution de CPLEX.

D'abord, nous avons fixé le paramètre  $\alpha$  à 1.0 et nous avons testé l'algorithme pour  $card = 5, \dots, 20$ . Ce sont des valeurs pour lesquelles le problème ( $P_{card}$ ) est difficile à résoudre. Nous avons choisi trois scénarios de rendement, un scénario de risque et un portefeuille de benchmark.

Le tableau 7.1 montre les résultats. Dans ce tableau, le paramètre de cardinalité (*card*), le rendement du portefeuille (Rend.), le risque attribué au portefeuille (Risque), le temps d'exécution (CPU) en secondes, pour l'algorithme DCA ainsi que le logiciel CPLEX ont été présentés.

Ensuite, nous avons choisi la valeur 10 pour le paramètre *card* et nous avons fait varier  $\alpha$  entre 0.0 et 1.0. *card* a été fixé à 10 car c'est une des valeurs pour lesquelles le problème est difficile à résoudre.

Nous avons réalisé les tests pour un scénario de risque et un portefeuille de benchmark. Nous avons choisi trois scénarios de rendement. Les tests ont été effectués d'abord sur le modèle avec un des trois scénarios de rendement et ensuite sur le modèle en présence des trois scénarios. Le tableau 7.2 montre les résultats sur le modèle avec un seul scénario et le tableau 7.3 correspond aux résultats du modèle à plusieurs scénarios. Dans ces tableaux, le paramètre d'aversion au risque ( $\alpha$ ), les valeurs optimales (Val. opt.) et le temps d'exécution (CPU) en secondes, pour l'algorithme DCA ainsi que pour le logiciel CPLEX ont été présentés.

Enfin, la performance du modèle min-max a été étudiée en terme de pire des cas par des frontières de risque-rendement.

Les figures 7.1(a) et 7.1(b) comparent les stratégies d'investissement au pire des cas avec un seul scénario et avec multiples scénarios. Dans chaque figure, la frontière la plus basse correspond aux modèles à plusieurs (i.e., trois) scénarios. Les autres courbes correspondent

card	CPLEX			DCA		
	CPU	Risque	Rend.	CPU	Risque	Rend.
5	1200.250	0.001105	-1.000	0.765	0.002725	0.023861
6	1200.062	0.000867	-1.000	0.781	0.004050	0.013534
7	1200.079	0.000725	0.000	0.985	0.003968	0.025722
8	1200.062	0.000590	-1.000	0.797	0.003824	0.040129
9	1200.062	0.000578	-1.000	0.891	0.003704	0.030346
10	1200.063	0.000532	0.000	0.796	0.003279	0.000029
11	1205.141	0.000455	-1.000	0.984	0.001906	0.014492
12	1206.547	0.000409	-1.000	0.875	0.001894	0.011593
13	1200.469	0.000348	0.000	0.922	0.001764	0.003485
14	1203.516	0.000244	-1.000	0.672	0.001585	0.003696
15	1204.359	0.000268	0.000	0.750	0.001551	-0.006994
16	1200.046	0.000200	-1.000	0.890	0.001052	0.016135
17	1201.062	0.000194	-1.000	0.765	0.000786	0.011584
18	1200.047	0.000225	-1.000	0.625	0.000448	-0.008982
19	1203.843	0.000200	-1.000	0.687	0.000395	-0.029241
20	1200.750	0.000191	-1.000	0.688	0.000619	-0.045734

TABLE 7.1 – Les résultats pour différentes valeurs de *card*. Puisque  $\alpha = 1.0$  alors les valeurs de *Risque* correspondent aux valeurs optimales de fonction objectif.

$\alpha$	CPLEX		DCA	
	Val. opt.	CPU	Val. opt.	CPU
1.0	0.000586	1200.063	0.003279	0.781
0.96	-0.011740	126.297	-0.011813	0.625
0.95	-0.015946	0.500	-0.015946	0.532
0.94	-0.020428	0.438	-0.020428	0.625
0.93	-0.025249	0.859	-0.025249	0.609
0.92	-0.030411	0.453	-0.030411	0.625
0.91	-0.035917	0.844	-0.035917	0.453
0.9	-0.041749	0.906	-0.041749	0.484
0.8	-0.118714	0.203	-0.118714	0.422
0.7	-0.209630	0.172	-0.209630	0.375
0.6	-0.300572	0.172	-0.300572	0.343
0.5	-0.391536	0.485	-0.391536	0.282
0.4	-0.482551	0.188	-0.482551	0.344
0.3	-0.573571	0.469	-0.573571	0.297
0.2	-0.664618	0.172	-0.664618	0.281
0.1	-0.755666	0.187	-0.755666	0.281
0.0	-0.846713	0.187	-0.846713	0.297
Intervalle		0.18 - 1200		0.2 - 0.78

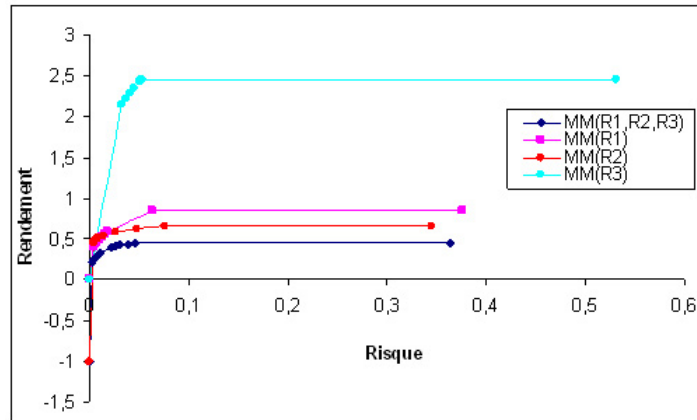
TABLE 7.2 – Comparaisons des résultats pour un seul scénario

$\alpha$	CPLEX		DCA	
	Val. opt.	CPU	Val. opt.	CPU
1.0	0.000532	1200.079	0.003279	0.782
0.96	-0.006169	71.954	-0.006112	0.703
0.95	-0.008485	3.859	-0.008479	0.516
0.94	-0.011030	0.485	-0.011069	0.547
0.93	-0.013859	0.922	-0.013859	0.656
0.92	-0.016877	0.531	-0.016877	0.562
0.91	-0.020105	0.593	-0.020105	0.703
0.9	-0.023393	0.625	-0.023478	0.594
0.8	-0.063321	0.563	-0.063321	0.375
0.7	-0.107344	0.672	-0.107344	0.391
0.6	-0.152804	0.203	-0.152804	0.453
0.5	-0.199755	0.234	-0.199755	0.328
0.4	-0.248653	0.203	-0.248653	0.343
0.3	-0.297840	0.203	-0.297840	0.344
0.2	-0.347028	0.203	-0.347028	0.359
0.1	-0.396215	0.203	-0.396215	0.313
0.0	-0.445402	0.203	-0.445402	0.328
Intervalle		0.2 - 1200		0.3 - 0.7

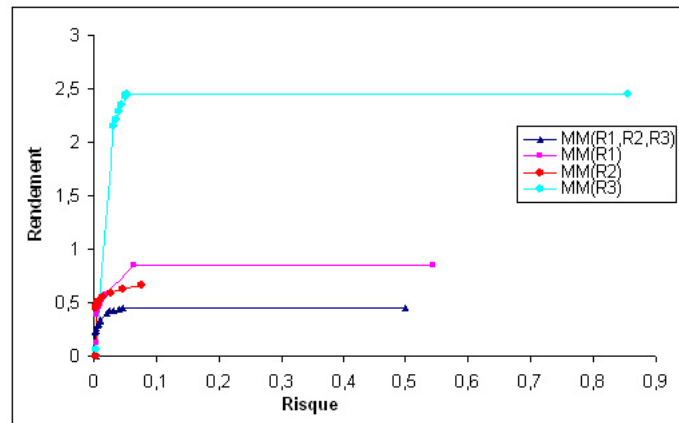
TABLE 7.3 – Comparaisons des résultats pour trois scénarios



aux modèles avec un seul scénario de rendement. Ces figures montrent que la stratégie de min-max à multiples scénarios présente une borne inférieure. Autrement dit, si un scénario différent de celui de min-max se réalise, la performance sera améliorée.



(a) CPLEX



(b) DCA

FIGURE 7.1 – Les strategies min-max avec un seul scénario de rendement et avec multiples scénarios de rendement

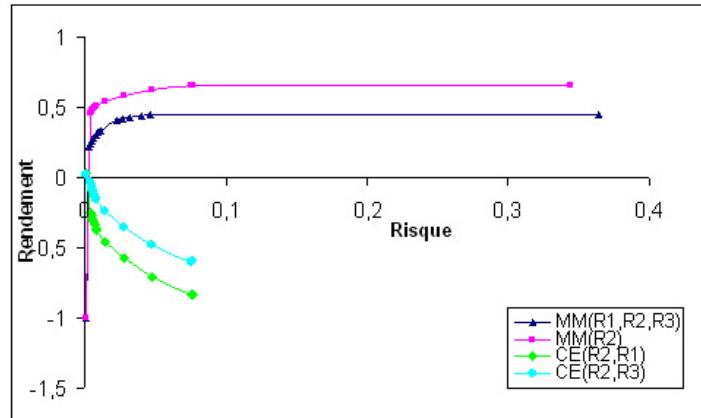
Nous avons aussi réalisé une évaluation croisée. Dans l'évaluation croisée, nous considérons un scénario et résolvons le problème qui lui correspond. Soit  $\mathbf{x}^*$  la solution optimale du problème. Ensuite nous examinons la performance du portefeuille si un autre scénario était réalisé. Pour cela, il nous suffit de calculer le risque et le rendement en utilisant les scénarios et la solution du problème résolu. Les formules suivantes ont été utilisées afin de calculer les risques et les rendements :

$$(\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \Lambda_i (\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k) : i = 1, \dots, I, k = 1, \dots, K$$

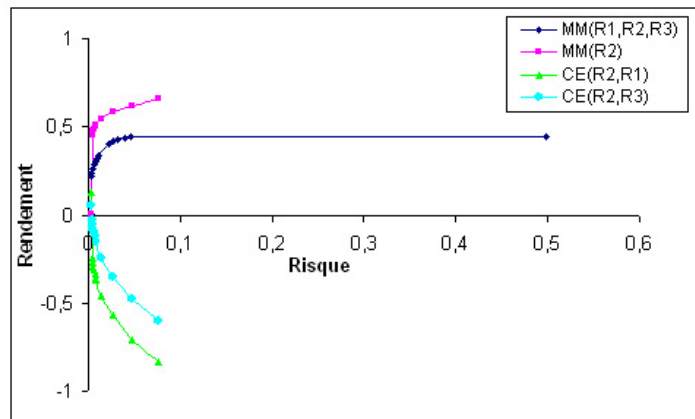
et

$$(\mathbf{x}^* - \bar{\mathbf{x}}_k)^t \mathbf{r}_j - \tau : j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K.$$

Pour nos tests, il existe trois scénarios R1, R2 et R3. Nous avons choisi le scénario R2. Les figures 7.2(a) et 7.2(b) montrent l'évaluation croisée du scénario R2. Ces figures montrent que si l'investisseur prend sa décision selon un seul scénario, la condition de son investissement dans le futur pourrait être pire que la stratégie min-max de tous les scénarios.



(a) CPLEX

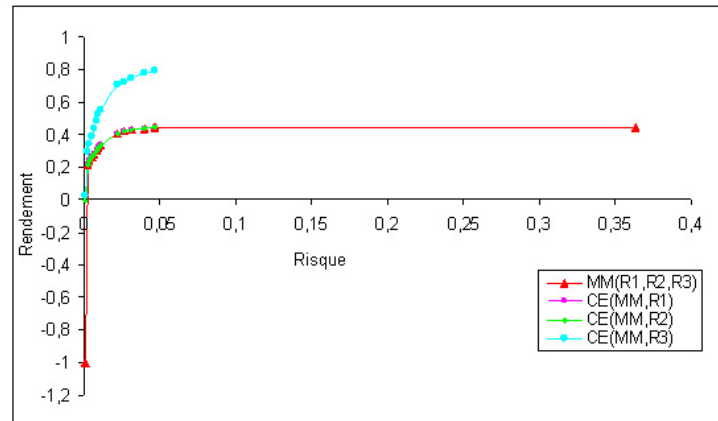


(b) DCA

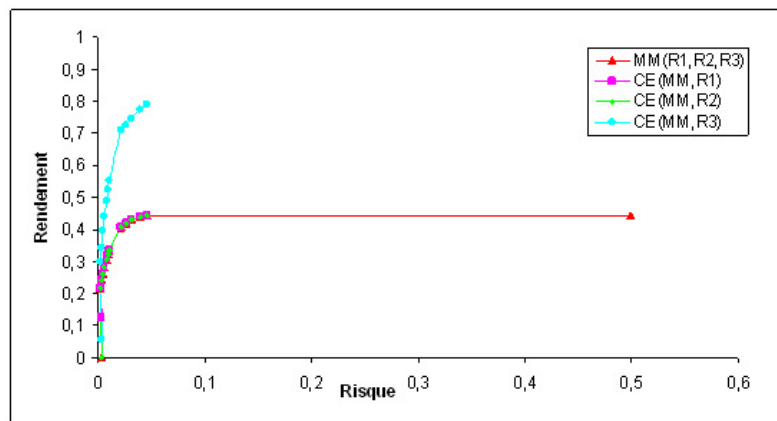
FIGURE 7.2 – Evaluation croisée avec un seul scénario de rendement

Le modèle min-max fournit un portefeuille optimal qui est simultanément le pire des cas possibles. Par conséquent, la stratégie optimale obtenue de cette façon a une performance qui est en effet une borne inférieure. Autrement dit, la performance de la stratégie d'investissement s'améliore si un autre scénario se réalise. La non-infériorité de stratégie min-max est présentée dans les figures 7.3(a) et 7.3(b). La frontière efficiente de min-max est celle qui est la plus basse. Les autres frontières s'obtiennent si on considère un seul scénario dans le modèle. Ceci confirme l'aspect important de min-max : si le pire des cas ne se réalise pas, la performance du portefeuille pourra s'améliorer.

Les figures 7.4(a) et 7.4(b) présente l'avantage d'utiliser le min-max. Les trois courbes les plus hausses placées représentent les frontières efficaces tracées par les solutions optimales des



(a) CPLEX



(b) DCA

FIGURE 7.3 – Non-infériorité de min-max

modèles avec un seul scénario. La courbe qui se trouve dans le centre est celle qui correspond à la stratégie fournie par le modèle à plusieurs scénarios. Les courbes en bas montrent le pire des cas pour les scénarios de rendement à l'égard du portefeuille optimal. Le modèle min-max construit un portefeuille optimal par le scénario le plus défavorable (pire des cas). Par conséquent, la performance de la stratégie de pire des cas est la meilleure borne inférieure pour toutes les stratégies possibles. Cette performance peut s'améliorer si un autre scénario que le pire des cas se réalise. De cette façon, la non-infériorité du modèle min-max garantit la robustesse des stratégies d'investissement.

### Commentaires sur les résultats

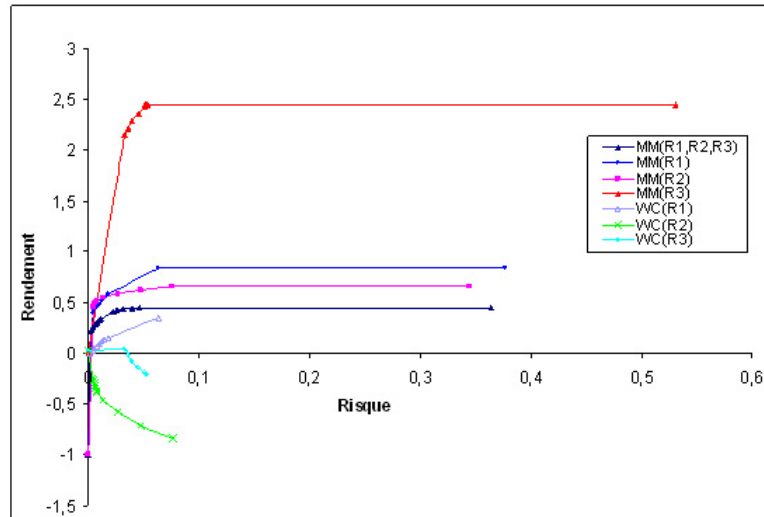
- Les expériences numériques montrent que le modèle min-max n'est pas stable à l'égard du paramètre d'aversion au risque, i.e.,  $\alpha$ . Car il est facile de résoudre pour les petites valeurs de  $\alpha$  et la résolution du modèle devient de plus en plus difficile quand  $\alpha$  tend

vers 1.0.

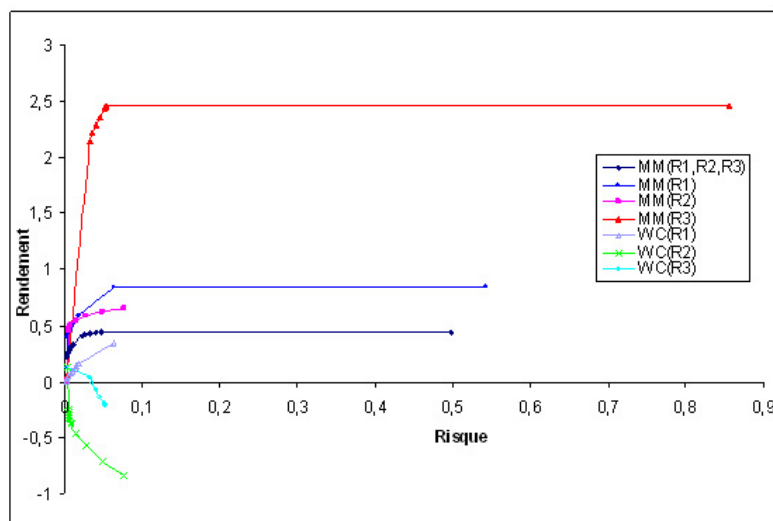
- Selon le tableau 7.1 les résultats fournis par DCA sont prometteurs, surtout au niveau du temps de CPU. Plus le paramètre de cardinalité est grand plus les solutions sont de meilleures qualités.
- Selon les tableaux 7.2 et 7.3 les solutions fournies par DCA sont de très bonnes qualités. Particulièrement, pour  $\alpha = 0.96$  dans le tableau 7.2 et pour  $\alpha = 0.9, 0.94$  dans le tableau 7.3. Ce sont les cas pour lesquels DCA donne des solutions de meilleurs qualités. Le temps de CPU est très court pour DCA, mais le temps de calcul de CPLEX augmente lorsque  $\alpha$  augmente.
- En ce qui concerne les figures, nous constatons que les courbes tracées en aide des solutions fournies par DCA sont presque identiques aux courbes des solutions de CPLEX. Les différences majeures correspondent aux cas où  $\alpha$  est égal à 1.0.

## 7.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes adressés à la robustesse en gestion de portefeuille. Nous avons présenté un modèle min-max en présence de contraintes de cardinalité. Le modèle peut accepter plusieurs scénarios, qu'ils soient de rendement ou de risque. Le modèle s'exprime sous forme d'un programme avec des contraintes quadratiques et des variables mixtes. Nous l'avons reformulé sous forme d'un programme DC, ensuite nous avons utilisé la méthode DCA pour le résoudre. Les résultats numériques sont très encourageants car les comparaisons que nous avons effectuées avec les solutions fournies par le logiciel CPLEX, confirment la performance de DCA pour résoudre des problèmes de type min-max en présence de contraintes de cardinalité.



(a) CPLEX



(b) DCA

FIGURE 7.4 – Analyse au pire des cas



# Conclusion

Cette thèse s'intéresse particulièrement aux techniques d'optimisation en finance. Sur le plan méthodologique elle repose sur deux grandes lignes d'optimisation non convexe : les algorithmes par Séparation et Évaluation et la programmation DC et DCA, parmi lesquelles DCA joue le rôle crucial. Notre ambition est de proposer les nouveaux algorithmes combinés efficaces basées sur DCA étant capables de traiter des problèmes de grande taille ou de taille moyenne. Sur le plan d'application nous concentrons à certains problèmes importants qui sont très étudiés et intéressés par les chercheurs en recherche opérationnelle et finance. Pour chacun de ces problèmes, nous avons proposé des algorithmes adaptés à sa structure particulière.

Par un souci constant d'exploiter l'efficacité des décompositions DC et des points initiaux de DCA, nous avons étudié avec soin la structure spéciale de chaque problème pour trouver des algorithmes bien adaptés, robustes et peu coûteux. Les résultats montrent que notre objectif est atteint.

Pour le modèle de choix de portefeuille sous les contraintes de seuil d'achat, nous avons comparé les résultats avec des algorithmes par Séparation et Évaluation (SE).

Quant aux différents modèles de choix de portefeuille sous les contraintes de cardinalité, nous avons proposé une combinaison de l'algorithme par Séparation et Évaluation et DCA. Cette combinaison permet de trouver des bons points initiaux pour DCA et/ou de prouver la globalité de DCA. La performance de l'approche combinée est largement supérieure au schéma SE classique.

L'étude sur l'investissement robuste avait plus d'aspect financier et nous avons comparé les effets de plusieurs scénarios, que ce soit de risque ou de rendement, sur la stratégie optimale d'investissement. Sur le plan numérique, nous avons comparé les résultats fournis par DCA avec ceux de CPLEX.

Concernant le problème sous les contraintes de seuil, nous avons proposé une nouvelle fonction de pénalité qui satisfait non seulement la condition sur la valeur binaire des variables mais aussi les conditions de complémentarité.

*L'art* de modélisation occupe une place importante dans nos travaux. En effet, grâce aux techniques de formulation/reformulation nous avons pu mettre en évidence la forme DC des problèmes étudiés. Quant au problème d'optimisation de portefeuille avec les fonctions

des coûts de transaction en escalier, cet art est plus visible. Grâce à la formulation DC polyédrale, nous avons réussi à estimer et résoudre un problème non convexe et non lisse de façon efficace. La convergence rapide et finie de DCA s'explique par son efficacité et de plus par la formulation DC polyédrale de la fonction approchée.

Finalement, dans les expériences numériques, nous avons montré la supériorité des algorithmes proposés par rapport aux algorithmes standards.

## Perspectives

Une question pertinente lors d'utilisation de DCA est : *comment trouver le bon point initial* ? Pour la plupart des problèmes les choix répondent parfaitement car nous avons une convergence très rapide vers des solutions de très bonnes qualités. Pourtant, la question reste ouverte pour des problèmes d'optimisation de portefeuille avec les fonctions des coûts de transaction ou l'Investissement robuste sous les contraintes de cardinalité car les résultats peuvent encore s'améliorer.

Pour la résolution des programmes linéaires et/ou quadratiques en variables mixte 0-1 dans le chapitre 4, le paramètre de pénalité influence considérablement la qualité des solutions obtenues. Il serait donc très intéressant d'étudier plus en détails le choix d'un tel paramètre.

Quant au modèle d'investissement robuste, nous avons étudié un modèle min-max *discret* qui était une généralisation du modèle MV de Markowitz sous les contraintes de cardinalité, la même généralisation peut s'effectuer sur un autre modèle où nous pouvons garder la même structure mais changer du modèle min-max de son cadre discret à un modèle continu.

Il existe des modèles en finance qui sont sous la forme d'une programmation mixte en variables entières. Il est toujours très coûteux de remplacer les variables entières par les variables binaires car le nombre de variables augmente de façon exponentielle. Pourrions-nous trouver des formulations DC afin de résoudre ces problèmes sans avoir besoin de remplacer les variables entières par celles binaires ?

Enfin, pour reformuler les programmes mixtes binaires sous forme DC, nous avons utilisé une fonction concave qui remplace les conditions binaires sur les variables, en outre nous avons proposé une autre fonction concave qui remplace les mêmes conditions ainsi que les contraintes de complémentarité. Ceci est fait grâce à la structure particulière du problème. Il existe des modèles qui contiennent seulement les contraintes de complémentarité. La question est : *comment peut-on reformuler le problème sous forme d'un programme DC* ?

Tous ces questions feront l'objet de nos travaux dans un futur proche.



# Bibliographie

- [1] ACERBI C. et D. TASCHE, *On the Coherence of Expected Shortfall*, Journal of Banking and Finance, Vol. 43, No. 7, 1487–1503, 2002.
- [2] AFTALION A., *La Nouvelle Finance et la Gestion des Portefeuilles*, Ed. Economica, Paris, 2003.
- [3] AKOA F.B., *Approches de points intérieurs et de programmation DC en optimisation non convexe. Code et simulations numériques industrielles*. Thèse de Doctorat de l'Université de Rouen, 2005.
- [4] ARTZNER P., F. DELBAEN, J.M. EBER et D. HEATH, *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, 203–228, 1999.
- [5] ATHEARN J.L., *What is Risk ?* The Journal of Risk and Insurance, 639–645, 1971.
- [6] AUSLENDER A., *Optimisation Méthodes Numériques*, Paris : Masson, 1976.
- [7] BARTHOLOMEW-BIGGS M.C., *Nonlinear Optimization with Financial Applications*, Kluwer Academic Publishers, United States of America, 2005.
- [8] BARTHOLOMEW-BIGGS M.C. et S.G. BARTHOLOMEW-BIGGS, *A global optimization problem in portfolio selection*, Computational Management Science, Available online, 2007.
- [9] BAWA V.S., *Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects*, Journal of Financial Economics, 2, 95–121, 1975.
- [10] BAWA V.S., S.J. BROWN, et R.W. KLEIN, *Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice*, North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1979.
- [11] BAWA V.S., *Stochastic Dominance : A Research Bibliography*, Management Science, 28, 698–712, 1982.
- [12] BENSON H.P., *Concave minimization : theory, applications and algorithms*, in Handbook of Global Optimisation, R. Horst and P. Padalos (Eds.), Kluwer Academic Publishers, 43–148, 1995.
- [13] BENSON H.P., *Deterministic algorithm for constrained concave minimization : a unified critical survey*, Naval Research Logistics, Vol.43, 765–795, 1996.
- [14] BENSON H.P. et R. HORST, *A branch and bound - outer approximation for concave minimization over a convex set*, Journal of Computers and Mathematics with applications, Vol.21, 67–76, 1991.

- [15] BRUSCO M.J. et S. STAHL *Branch and Bound Applications in Combinatorial Data Analysis*, Springer, 2005.
- [16] CHANG T.J., N. MEADE, J.E. BEASLEY et Y.M. SHARAIHA, *Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization*, *Computers & Operations Research*, 27, 1271–1302, 2000.
- [17] COLLOBERT R., F. SINZ, J. WESTON et L. BOTTOU *Trading Convexity for Scalability*, *Proceedings of the 23rd ICML*, 2006.
- [18] CORNUEJOLS G. et R. TUTUNCU, *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press, 2007.
- [19] COTTLE R.W. et G.B. DANTZIG *Complementary pivot theory of mathematical programming*, *Linear algebra and its applications*, Vol.1, 103–125, 1968.
- [20] CROWE R.M. et R.C. HORN, *The Meaning of Risk*, *The Journal of Risk and Insurance*, No. 3, 459–474, 1957.
- [21] DANTZIG G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [22] DANTZIG G.B., D.R. FULKERSON et S.M. JOHNSON *Solution of a large scale traveling salesman problem*, *Operations Research*, Vol.2, 393–410, 1954.
- [23] DAVIS M.H.A. et A.R. NORMAN, *Portfolio selection with transaction costs*, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 15, N. 4, 676–713, 1990.
- [24] DEMANGE G. et J.C. ROCHET *Méthodes mathématiques de la finance*, Economica, France, (3rd Edition) 2005.
- [25] EASTMAN W.L., *Linear Programming with Pattern Constraints*, Ph.D. thesis, The computation Laboratory, Harvard University, 1958.
- [26] EASTMAN W.L., *A Solution to the Travelling Salesman Problem*, Presented at the American Summer Meeting of the Econometric Society, Cambridge, Mass., 1958.
- [27] ELTON E.J., M.J. GRUBNER, S.J. BROWN et W.N. GOETZMANN, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., United States of America, 2003.
- [28] FALK, J.E. et R.M. SOLAND, *An algorithm for separable nonconvex programming problems*, *Management Science*, 15, 550–569, 1969.
- [29] FERNANDEZ A. et S. GOMEZ, *Portfolio selection using neural networks*, *Computers & Operations Research*, 34, 1177–1191, 2007.
- [30] FISHBURN P.C., *Decision and Value Theory*, Wiley, New York, 1964.
- [31] FISHBURN P.C., *Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns*, *The American Economic Review*, Vol. 67, No. 2, 116–126, 1977.
- [32] FLETCHER R., *Practical methods of Optimization*, John Wiley, New York, 1980.
- [33] GAUTAM M., *A review of portfolio planning : models and systems*, S. Satchell et A. Scowcroft (Eds.), *Advances in Portfolio Construction and Implementation*, Elsevier, Burlington MA, 1–39, 2003.

- [34] GREBECK M.J., *Applications of Stochastic Programming to asset liability Management*, Ph. D. thesis in Statistics and Applied Probability , University of California, Santa Barbara, 2006.
- [35] GULPINAR N., H.A LE THI et M. MOEINI, *Robust Investment Strategies with Discrete Asset Choice Constraints Using DCA*, submitted to *Journal of Global Optimization*.
- [36] GULPINAR N. et B. RUSTEM, *Continuous Min-Max Approach for Single Period Portfolio Selection Problem*, M. Breton and H. Ben-Ameur (Eds.), in *Numerical Methods in Finance*, Springer, 241–258, 2005.
- [37] GULPINAR N. et B. RUSTEM, *Worst-case robust decisions for multi-period mean-variance portfolio optimization*, *European Journal of Operational Research*, Vol. 183, 981–1000, 2007.
- [38] GULPINAR N., B. RUSTEM et R. SETTERGREN, *Simulation and Optimization Approaches to Scenario tree Generation*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28 , 1291–1315, 2004.
- [39] GUPTA O.K., *Branch and Bound Experiments in Nonlinear Integer Programming*, Ph.D. thesis, Purdue University, 1980.
- [40] HARDY G.H. et J.E. LITTLEWOOD and G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1934.
- [41] HANOCH G. et H. LEVY, *The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk*, *Rev. Economic Studies*, Vol. 36, 335–346, 1969.
- [42] HIRIART URRUTY J.B. et C. LEMARECHAL *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer, Berlin, 1993.
- [43] HOLTON G.A., *Defining Risk*, *Financial Analysts Journal*, Vol. 60, No. 6, 19–25, 2004.
- [44] HORST R., *A general class of branch-and-bound methods in global optimization with some new approaches for concave minimization*, *Journal of Optimization Theory and Application*, 58, 11–37, 1988.
- [45] HORST R., N.V. THOAI et J. DE VRIES, *On finding new vertices and redundant constraints in cutting plane algorithms for global optimization*, *Operations Research Letters*, 7, 85–90, 1988.
- [46] HORST R., N.V THOAI et H. TUY, *On a outer approximation concept in global optimization*, *Optimization*, Vol.20, 255–264, 1989.
- [47] HORST R., N.V THOAI et H.P BENSON, *Concave minimization via conical partitions and polyhedral outer approximation*, *Mathematical Programming*, Vol.50, 259–276, 1991.
- [48] HORST R., P.M PARDALOS et N.V THOAI, *Introduction to Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [49] HORST R. et H. TUY, *Global Optimization : Deterministic Approaches*, Third edition, Springer-Verlag, 1996.
- [50] HORST R. et N.V THOAI, *DC Programming : Overview*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.2103, 1–43, 1999.

- [51] JOBST N., M. HORNIMAN, C. LUCAS et G. MITRA, *Computational aspects of alternative portfolio selection models in the presence of discrete asset choice constraints*, Quantitative Finance, 1, 1–13, 2001.
- [52] JORION P., *Value at Risk*, McGraw-Hill, New York, 2000.
- [53] KALANTARI B. et J.B. ROSEN, *Algorithm for global minimization of linearly constrained concave quadratic functions*, Operations Research, Vol. 12, 544–561, 1987.
- [54] KONNO H., *Applications of Global Optimization to Portfolio Analysis*, C. Audet, P. Hansen and G. Savard (Eds.), Essays and Surveys in Global Optimization (First edn), Springer USA, 195–210, 2005.
- [55] KONNO H., K. AKISHINO et R. YAMAMOTO, *Optimization of a Long-Short Portfolio under Nonconvex Transaction Cost*, Computational Optimization and Applications, 32, 115–132, 2005.
- [56] KONNO H., T. KOSHIZUKA et R. YAMAMOTO, *Mean-variance portfolio optimization problems under short sale opportunity*, to appear in Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive System.
- [57] KONNO H. et A. WIJAYANAYAKE, *Mean-absolute deviation portfolio optimization model under transaction costs*, Journal of Operations Research Society of Japan, 42, 422–435, 1999.
- [58] KONNO H. et A. WIJAYANAYAKE, *Portfolio optimization problem under concave transaction costs and minimal transaction unit constraints*, Mathematical Programming Ser. B, 89, 233–250, 2001.
- [59] KONNO H. et A. WIJAYANAYAKE, *Portfolio optimization under DC transaction costs and minimal transaction unit constraints*, Journal of Global Optimization, 22, 137–154, 2002.
- [60] KONNO H. et R. YAMAMOTO, *Global optimization versus integer programming in portfolio optimization under nonconvex transaction costs*, Journal of Global Optimization, 32, 207–219, 2005.
- [61] KONNO H. et R. YAMAMOTO, *Integer programming approaches in mean-risk models*, Computational Management Science, 2, 339–351, 2005.
- [62] KONNO H. et H. YAMAZAKI, *Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market*, Management Science, 37, 519–531, 1991.
- [63] KRAUSE A., *Coherent risk measurement :an introduction*, Balance Sheet, Vol. 10, No. 4, 13–17, 2002.
- [64] KRAUSE N. et Y. SINGER *Leveraging the margin more carefully*, International Conference on Machine Learning ICML, 2004.
- [65] KÜHN J., *Optimal Risk-Return Trade-off of Commercial Banks and the stability of Profitability Measures for Loan Portfolios*, Springer, Berlin Heidelberg, 2006.
- [66] LAND A.H. et A.G. DOIG *An automatic method for solving discrete programming problems*, Econometrica, 28, 497–520, 1960.

- [67] LAURENT P.J., *Approximation et optimisation*, Paris : Hermann, 1972.
- [68] LAURENT P.J., *Approximation et Optimisation*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [69] LOBO M.S., M. FAZEL et S. BOYD, *Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs*, Annals of Operations Research, 152, 341–365, 2007.
- [70] LE THI H.A., *Analyse numérique des algorithmes de l'optimisation DC. Approches locale et globale. Codes et simulations numériques en grande dimension. Applications*. Thèse de Doctorat de l'Université de Rouen, 1994.
- [71] LE THI H.A., *Contribution à l'optimisation non convexe et l'optimisation globale : Théorie, Algorithmes et Applications*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Rouen, 1997.
- [72] LE THI H.A., *An efficient algorithm for globally minimizing a quadratic function under convex quadratic constraints*, Mathematical Programming, Ser. A, Vol.87, N° .3, 401–426, 2000.
- [73] LE THI H.A., *Solving large scale Molecular distance geometry problem by a smoothing technique via the Gaussian transform an DC programming*, Journal of Global Optimization, Vol.27, 375–397, 2003.
- [74] LE THI H.A., T. BELGHITI et T. PHAM DINH, *A new efficient algorithm based on DC programming and DCA for Clustering*, In Press, Available July 2006, Journal of Global Optimization.
- [75] LE THI H.A., M. LE HOAI, T.P NGUYEN et T. PHAM DINH, *Noisy Image Segmentation by Fuzzy C-Means Clustering based DCA*, Submitted, 2007.
- [76] LE THI H.A., M. LE HOAI et T. PHAM DINH, *Optimization based DC programming and DCA for Hierarchical Clustering*, In Press, Available Online June 2006, European Journal of Operational Research.
- [77] LE THI H.A., M. LE HOAI et T. PHAM DINH, *Une nouvelle approche basée sur la programmation DC et DCA pour la classification floue*, EGC 2007, RNTI, 703–714, 2007.
- [78] LE THI H.A., M. MOEINI et T. PHAM DINH, *Portfolio Selection under Downside Risk Measures and Cardinality Constraints based on DC Programming and DCA*, to appear in *Computational Management Science*, 2008.
- [79] LE THI H.A., M. MOEINI et T. PHAM DINH, *DC programming Approach for Portfolio Optimization under Step Increasing Transaction Costs*, to appear in *Optimization*, 2008.
- [80] LE THI H.A. et M. MOEINI, *Optimization of a Long-Short Portfolio under Threshold Constraints using DC Programming and DCA*, submitted to *Operations Research*.
- [81] LE THI H.A. et M. MOEINI, *Portfolio Selection Under Buy-In Threshold Constraints Using DC Programming and DCA*, Proceeding of third International Conference on Service Systems and Service Management (SSSM06/IEEE), Troyes, October 2006, pp. 296-300.

- [82] LE THI H.A., T.P. NGUYEN et T. PHAM DINH, *A Continuous DC Programming Approach To The Strategic Supply Chain Design Problem From Qualified Partner Set*, In Press, Available Online June 2006, European Journal of Operational Research.
- [83] LE THI H.A. et T. PHAM DINH *Solving a class of linearly constrained indefinite quadratic problems by DC algorithms*, Journal of Global Optimization, Vol.11, 253–285, 1997.
- [84] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *A Branch-and-Bound method via DC Optimization Algorithm and Ellipsoidal techniques for Box Constrained Nonconvex Quadratic Programming Problems*, Journal of Global Optimization, Vol.13, 171–206, 1998.
- [85] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *DC programming approach for large-scale molecular optimization via the general distance geometry problem*, Nonconvex Optimization and Its Applications 40, in Optimization in Computational Chemistry and Molecular Biology : Local and Global Approaches, Kluwer Academic Publishers, 301–339, 2000.
- [86] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *Large Scale Molecular Conformation via the Exact Distance Geometry Problem*, In Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.481, Heidelberg, Springer-Verlag, 260-277, 2000.
- [87] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *A continuous Approach for Globally Solving Linearly Constrained Quadratic Zero - One Programming Problems*, Optimization, Vol.50, 93–120, 2001.
- [88] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *DC optimization approaches via Markov models for restoration of signals (1-D) and (2-D)*, Nonconvex Optimization and Its Applications 54 : In Advances in Convex Analysis and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, 300–317, 2001.
- [89] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *DC programming approach and solution algorithm to the multidimensional scaling problem*, Nonconvex Optimization and Its Applications 53 : In From Local to Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, 231–276, 2001.
- [90] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *DC Programming Approach for Multicommodity Network Optimization Problems with Step Increasing Cost Functions*, Special Issue of Journal of Global Optimization (dedicated to Professor R. Horst on the occasion of his 60 th birthday), Vol.22, 204–233, 2002.
- [91] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *Dc Programming. Theory, Algorithms, Applications : The State of the Art*, First International Workshop on Global Constrained Optimization and Constraint Satisfaction, October 2-4, 2002, Valbonne-Sophia Antipolis, France, Research Report, Laboratory of Modeling, Optimization & Operations Research, Insa-Rouen, France, 2002.
- [92] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *Large scale molecular optimization from distances matrices by a DC optimization approach*, SIAM Journal of Optimization, Vol.14, N°.1, 77–116, 2003.
- [93] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *A new algorithm for solving large scale molecular distance geometry problems*, Applied Optimization : in Hight Performance Algorithms and Software for Nonlinear Optimization, Kluwer Academic Publishers, 276–296, 2003.

- [94] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *The DC (Difference of Convex functions) Programming and DCA Revisited with DC Models of Real World Nonconvex Optimization Problems*, Annals of Operations Research, Vol.133, 23–46, 2005.
- [95] LE THI H.A. et T. PHAM DINH, *A continuous approach for the concave cost supply problem via DC Programming and DCA*, to appear in Discrete Applied Mathematics.
- [96] LE THI H.A., T. PHAM DINH et H. DINH NHO, *Towards Tikhonov regularization of nonlinear ill-posed problems : a DC programming approach*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Vol.335, 1073–1078, 2002.
- [97] LE THI H.A., T. PHAM DINH et H. DINH NHO, *Solving inverse problems for an elliptic equations by DC (Difference of Convex functions) programming*, Journal of Global Optimization, Vol.25, 407–423, 2003.
- [98] LE THI H.A., T. PHAM DINH et H. DINH NHO, *On the ill-posedness of the trust region Subproblem*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, Vol.11, 545–577, 2003.
- [99] LE THI H.A., T. PHAM DINH et N. HUYNH VAN, *Exact penalty techniques in DC Programming*, Submitted, 2004.
- [100] LE THI H.A., T. PHAM DINH et M. LE DUNG, *Numerical solution for optimization over the efficient set by DC optimization algorithm*, Operations Research Letters, Vol.19, 117–128, 1996.
- [101] HLE THI H.A., T. PHAM DINH et M. LE DUNG, *A combined DC Optimization : Ellipsoidal Branch-and-Bound Algorithm for Solving Nonconvex Quadratic Programming Problems*, Journal of Combinatorial Optimization, Vol.2, N° 1, 9–28, 1998.
- [102] LE THI H.A., T. PHAM DINH et M. LE DUNG, *Exact Penalty in DC. Programming*, Vietnam Journal of Mathematics, Vol.27, N° 2, 169–178, 1999.
- [103] LE THI H.A., T. PHAM DINH et M. LE DUNG, *Simplicially Constrained DC Optimization over the Efficient Set and Weakly Efficient Sets*, Journal of Optimization, Theory and Applications, Vol.117, N° 3, 503–531, 2003.
- [104] LE THI H.A., T. PHAM DINH et T. NGUYEN VAN, *Combination between Local and Global Methods for Solving an Optimization Problem over the Efficient Set*, European Journal of Operational Research, Vol.142, 257–270, 2002.
- [105] LE THI H.A., T. PHAM DINH et V.N. HUYNH, *Exact Penalty Techniques in DC Programming*, LMI, National Institute for Applied Sciences - Rouen, France, July, (2005).
- [106] LEVENBERG K., *A method for the solution or certain nonlinear problems in least quares*, Quart. Appl. Math., Vol.2, 1944.
- [107] LEVY H., *Stochastic dominance and expected utility : Survey and analysis*, Management Science, 38, 555–593, 1992.
- [108] LEVY H., *Stochastic Dominance Investment Decision Making Under Uncertainty*, Springer, United States of America, (2nd Ed.), 2006.
- [109] LITTLE J.D.C., K.G. MURTY, D.W. SWEENEY et C. KAREL, *An Algorithm for Travelling Salesman Problem*, Operations Research, Vol. 11, 972–989, 1963.

- [110] LIU Y., X. SHEN et H. DOSS *Multicategory  $\psi$ -Learning and Support Vector Machine : Computational Tools*, Journal of Computational and Graphical Statistics, Vol.14, 219–236, 2005.
- [111] LIU Y. et X. SHEN, *Multicategory  $\psi$ -Learning*, Journal of the American Statistical Association, Vol.101, 500–509, 2006.
- [112] MARKOWITZ H.M., *Portfolio Selection*, Journal of Finance, Vol. 7, 77–91, 1952.
- [113] MARKOWITZ H.M., *Portfolio Selection*, John Wiley & Sons, New York, 1959.
- [114] MARINGER D., *Portfolio Management With Heuristic Optimization*, Springer, Dordrecht, 2005.
- [115] MARQUARDT D.W., *An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters*, SIAM J. Appl. Math., Vol.11, 1963.
- [116] MORÉ J.J., *Recent developpements in algorithm and software for trust region methods*, Mathematique Programming, The state of the art, Springer-Verlag, Berlin, 258–287, 1983.
- [117] MORÉ J.J. et D.C. SORENSEN, *Computing a trust region step*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., Vol.4, 553–572, 1983.
- [118] MORGAN/REUTERS J.P., *Value at Risk*, RiskMetrics-Technical Document. J.P. Morgan, 4th edition 1996.
- [119] MURTY K.G., C. KAREL et J.D.C. LITTLE, *The traveling salesman problem : Solution by a method of ranking assignments*, Cleveland : Case Institute of Technology, 1962.
- [120] K.G. MURTY, *Operations research : Deterministic optimization models*, Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1995.
- [121] MUU L.D., T.Q. PHONG et T.D. PHAM, *Decomposition methods for solving a class of nonconvex programming problems dealing with bilinear and quadratic functions*, Computational Optimization and Application, 4, 203–216, 1995.
- [122] NAWROCKI Q., *A brief history of Downside Risk Measures*, Technical Report, Villanova, Arcola, PA.
- [123] NEUMANN J., C. SCHNÖRR et G. STEIDL, *SVM-based Feature Selection by Direct Objective Minimisation*, Pattern Recognition, Proc. of 26th DAGM Symposium, LNCS, Springer, August 2004.
- [124] NEUMANN J., C. SCHNÖRR et G. STEIDL, *Combined SVM-Based Feature Selection and Classification Machine Learning*, in Press (published online) <http://www.cvgpr.uni-mannheim.de/Publications/ML-05.pdf>.
- [125] OGRYCZAK W. et A. RUSZCZYNSKI, *From stochastic dominance to mean-risk model : Semideviation as the risk measures*, European Journal of Operational Research, Vol. 116, 33–50, 1999.
- [126] OGRYCZAK W. et A. RUSZCZYNSKI, *On consistency of stochastic dominance and mean- semideviation models*, Mathematical Programming, 89, 217–232, 2001.



- [127] PARDALOS P.M. et J.B. ROSEN, *Constrained Global Optimization : Algorithms and Applications*, in Lecture Notes in Computer Science, G. Goos and J. Hartmanis eds., Springer, 1987.
- [128] PEYRARD J. et M. PEYRARD, *Dictionnaire de finance*, Librairie Vuibert, 2001.
- [129] PHAM DINH T., *Elements homoduaux relatifs à un couple de normes  $(\varphi, \psi)$ . Applications au calcul de  $S_{\varphi\psi}(A)$* , Technical Report, Grenoble, 1975.
- [130] PHAM DINH T., *Calcul du maximum d'une forme quadratique définie positive sur la boule unité de la norme du max*, Technical Report, Grenoble, 1976.
- [131] PHAM DINH T., *Contribution à la théorie de normes et ses applications à l'analyse numérique*, Thèse de Doctorat d'Etat Es Science, Université Joseph Fourier- Grenoble, 1981.
- [132] PHAM DINH T., *Convergence of subgradient method for computing the bound norm of matrices*, Linear Alg. and Its Appl., Vol.62, 163–182, 1984.
- [133] PHAM DINH T., *Algorithmes de calcul d'une forme quadratique sur la boule unité de la norme maximum*, Numer. Math., Vol.45, 377–440, 1985.
- [134] PHAM DINH T., *Algorithms for solving a class of non convex optimization problems. Methods of subgradients*, Fermat days 85. Mathematics for Optimization, Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, 1986.
- [135] PHAM DINH T., *Duality in DC (difference of convex functions) optimization. Subgradient methods*, Trends in Mathematical Optimization, International Series of Numer Math., Vol 84, 277–293, 1988.
- [136] PHAM DINH T. et H.A LE THI, *Stabilité de la dualité lagrangienne en optimisation DC (différence de deux fonctions convexes)*, C.R. Acad. Paris, P.318, Série I, 379–384, 1994.
- [137] PHAM DINH T. et H.A LE THI, *Lagrangian stability and global optimality in nonconvex quadratic minimization over Euclidean balls and spheres*, Journal of Convex Analysis, Vol.2, 263–276, 1995.
- [138] PHAM DINH T. et H.A LE THI, *DC optimization algorithms for globally minimizing nonconvex quadratic forms on Euclidean balls and spheres*, Operations Research Letters, Vol.19, 207–216, 1996.
- [139] PHAM DINH T. et H.A LE THI, *Convex analysis approach to d.c. programming : Theory, Algorithms and Applications*, Acta Mathematica Vietnamica, dedicated to Professor Hoang Tuy on the occasion of his 70th birthday, Vol.22, N°.1, 289–355, 1997.
- [140] PHAM DINH T. et H.A LE THI, *DC optimization algorithms for solving the trust region subproblem*, SIAM Journal of Optimization, Vol.8, N°.2, 476–505, 1998.
- [141] PHILLIPS A.T. et J.B. ROSEN, *A parallel algorithm for constrained concave quadratic global minimization*, Mathematical Programming, 42, 412–448, 1988.
- [142] PHONG T.Q., *Analyse Numerique des Méthodes d'Optimisation Globale*, Thèse de Doctoral, Université de Rouen, 1994.

- [143] PHONG T.Q., T. PHAM DINH et H.A LE THI, *A New Method for Solving DC Programming Problems. Application to Fuel Mixture Nonconvex Optimization Problem*, Journal of Global Optimal, Vol.6, 87–105, 1995.
- [144] POLYAK B.T., *Introduction to optimization*, Inc., Publications Division, 1987.
- [145] POTAPTCHIK M., *Portfolio Selection under Nonsmooth Transaction Costs*, Ph.D. thesis, University of Waterloo, 2006.
- [146] ROCKAFELLAR R.T., *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [147] ROCKAFELLAR R.T., *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol.14, 877–898, 1976.
- [148] ROCKAFELLAR R.T. et S. URYASEV, *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Journal of Banking and Finance, Vol. 26, No. 7, 1443–1471, 2002.
- [149] RUSTEM B., R. BECKER et W. MARTY, *Robust Min-Max Portfolio strategies for Rival Forecast and Risk Scenarios*, Journal of Economic Dynamics and Control, 24, 1591–1623, 2000.
- [150] RONAN C., S. FABIAN, W. JASON et B. LÉON, *Trading Convexity for Scalability*, International Conference on Machine Learning ICML, 2006.
- [151] ROTHSCHILD M. et J.E. STIGLITZ, *Increasing Risk. I. A Definition*, Journal of Economic Theory, 2, 225–243, 1970.
- [152] ROY A.D., *Safety First And The Holding Of Assets*, Econometrica, 20, 431–449, 1952.
- [153] SADJADI S.J. et K. PONNAMBALAM, *Advances in trust region algorithms for constrained optimization*, Applied Numerical Mathematics, Vol.29, 423–443, 1999.
- [154] SCHAERF A., *Local search techniques for constrained portfolio selection problems*, Computational Economics, 20, 177–90, 2002.
- [155] SCHERER B. et M.R. DOUGLAS, *Introduction to Modern Portfolio Optimization With NUOPT and S-PLUS*, Springer, USA, 2005.
- [156] SCHÜLE T., C. SCHNÖRR, S. WEBER et J. HORNEGGER, *Discrete Tomography by convex-concave regularization and DC programming*, Discrete Applied Mat., Vol.151, 229–243, 2005.
- [157] SCHÜLE T., S. WEBER et C. SCHNÖRR, *Adaptive Reconstruction of Discrete-Valued Objects from few Projections*, Electr. Notes in Discr. Math., Vol.20, 365–384, 2005.
- [158] SHEN X., *From large margin classification to  $\psi$ -learning*, School of Statistics, University of Minnesota.
- [159] SHEN X., G.C TSENG, X. ZHANG, et W.H WONG, *On  $\psi$ -Learning*, Journal of American Statistical Association, Vol.98, 724–734, 2003.
- [160] SIMAAN Y., *Estimation Risk in Portfolio Selection : The Mean Variance Model Versus the Mean Absolute Deviation Model*, Management Science, 43, 1437–1446, 1997.
- [161] SORENSSEN D.C., *Newton's method with a model trust region modification*, SIAM J. Numer. Anal., Vol.19, N°.2, 409–426, 1982.

- [162] STEIHAUG S., *The conjugate gradient method and trust region in large scale optimization*, SIAM J. Numer. Anal., Vol.20, 626–637, 1983.
- [163] STONE B.K., *A General Class of Three Parameter Risk Measures*, Journal of Finance, Vol. 28, 675–685, 1973.
- [164] THACH P.T., *DC sets, DC functions and nonlinear equations*, Mathematical Programming, Vol.58, 415–428, 1993.
- [165] THOAI N.V. et H. TUY, *Convergent algorithms for minimizing a concave function*, Math. Operations Research, 5, 556–566, 1980.
- [166] TOBIN J., *Liquidity Preferences as Behavior Towards Risk*, Rev. Econ. Stud., Vol. 25, 65–85, 1958.
- [167] TODD B.B., *Improved branch and bound algorithms for integer programming*, Ph.D. thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, 1992.
- [168] TOLAND J.F., *Duality in nonconvex optimization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.66, 399–415, 1978.
- [169] TOLAND J.F., *On subdifferential calculus and duality in nonconvex optimization*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 60, 177–183, 1979.
- [170] TOINT P.L., *Towards an efficient sparsity exploiting Newton method for minimization*, Duff, I., ed., Sparse Matrices and Their Uses, 57–88, Academic Press, 1981.
- [171] TUY H., *Concave programming under linear constraints*, Translated Soviet Mathematics, Vol.5, 1437–1440, 1964.
- [172] TUY H., *On outer approximation methods for solving concave minimization problems*, Acta Mathematica Vietnamica, Vol.8, 3–34, 1983.
- [173] TUY H., *Global Minimization of a Difference of Two Convex Functions*, Mathematics Programming Study, Vol.30, 150–182, 1987.
- [174] TUY H., *Global Optimization : Deterministic Approaches*, 2nd revised edition, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [175] TUY H., *DC Optimisation : Theory, Methods and Algorithms*, Handbook of Global Optimisation, Horst and Pardalos eds, Kluwer Academic Publishers, 149–216, 1995.
- [176] TUY H., *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [177] TUY H., T.V. THIEU et N.Q. THAI, *A conical algorithm for globally minimizing a concave function over a convex set*, Math. Operations Research, 10, 498–514, 1985.
- [178] URRUTY J.B.H., *Generalized differentiability, duality and optimization for problem dealing with differences of convex functions*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.256, Heidelberg, Springer-Verlag, 260–277, 1985.
- [179] URRUTY J.B.H., *Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité globale en optimisation de différences de deux fonctions convexes*, CRAS, Vol.309, Série I, 459–462, 1989.
- [180] VON NEUMAN J. et O. MORGENSTEM, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ (2nd Ed.), 1947 (3rd Ed.), 1953.

- [181] VINH N.V., *Méthodes exactes pour l'optimisation DC polyédrale en variables mixtes 0-1 basées sur DCA et des nouvelles coupes*, Thèse de Doctorat de l'Université de Rouen, 2006.
- [182] WEBER S., A. NAGY, T. SCHÜLE, C. SCHNÖRR et A. KUBA, *A Benchmark Evaluation of Large-Scale Optimization Approaches to Binary Tomography*, DGC1 2006, LNCS 4245, 146–156, 2006.
- [183] WEBER S., C. SCHNÖRR, T. SCHÜLE et J. HORNEGGER, *Binary Tomography by Iterating Linear Programs*, R. Klette, R. Kozera, L. Noakes and J. Weickert (Eds.), *Computational Imaging and Vision - Geometric Properties from Incomplete Data*, Kluwer Academic Press 2005.
- [184] WEBER S., T. SCHÜLE, J. HORNEGGER et C. SCHNÖRR, *Binary Tomography by Iterating Linear Programs from Noisy Projections*, IWCIA, LNCS 3322, 38–51, 2004.
- [185] WEBER S., T. SCHÜLE, A. KUBA et C. SCHNÖRR, *Binary Tomography with Deblurring*, IWCIA 2006, LNCS 4040, 375–388, 2006.
- [186] WEBER S., T. SCHÜLE et C. SCHNÖRR, *Prior Learning and Convex-Concave Regularization of Binary Tomography*, *Electr. Notes in Discr. Math.*, Vol.20, 313–327, 2005.
- [187] RENDL F. et H. WOLKOVICZ, *A semidefinite framework to trust region subproblems with application to large scale minimization*, CORR Report 94-32, University of Waterloo, 1994.
- [188] XUE H.G., C.X. XU et Z.X. FENG, *Mean-variance portfolio optimal problem under concave transaction cost*, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 1–12, 2006.
- [189] YUILLE A.L. et A. RANGARAJAN, *The Convex Concave Procedure (CCCP)*, *Advances in Neural Information Processing System 14*, Cambridge MA : MIT Press.

